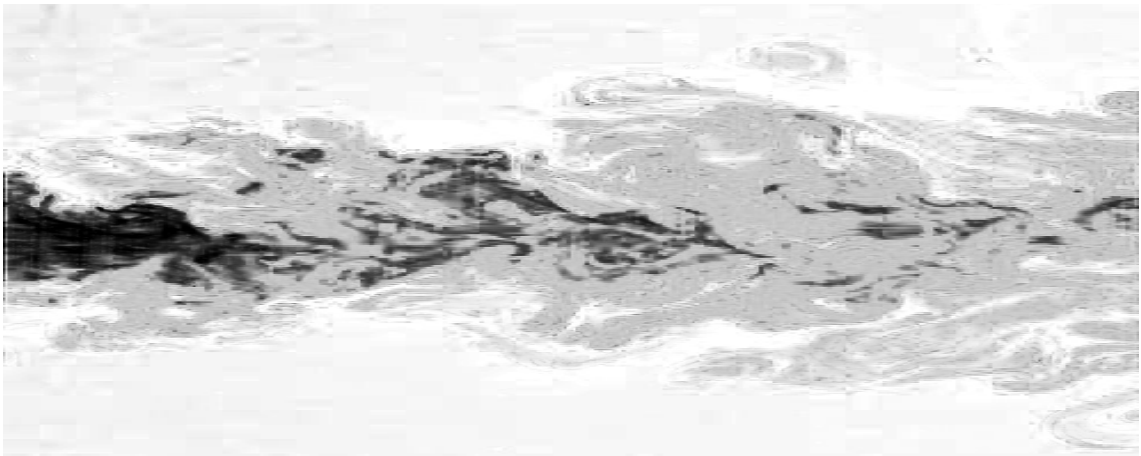


INSTITUTE FOR MARINE AND
ATMOSPHERIC RESEARCH
UTRECHT

Dictaat & College: Willem Jan van de Berg

STROMINGSLEER EN TRANSPORTVERSCHIJNSELEN



NS-265B

Deel 1: Collegeweek 1 tot 5

Versie 1.1; 3 februari 2014

Inhoudsopgave

1	Inleiding	7
1.1	Leerdoelen	7
1.2	Inleidende en kaderende overwegingen	7
1.2.1	<i>Laminaire versus turbulente stroming</i>	7
1.2.2	<i>De ruimte- en tijdschalen van bewegende vloeistoffen</i>	8
1.2.3	<i>Fysische tijdschalen</i>	9
1.2.4	<i>Dimensieloze getallen</i>	9
1.2.5	<i>Turbulentie</i>	10
1.3	Opbouw college	11
1.4	Wiskunde: notatie & voorkennis	11
1.4.1	<i>Differentiaalvergelijkingen</i>	11
1.4.2	<i>Complexe getallen</i>	11
1.4.3	<i>Tensor, vector en matrixnotatie</i>	11
1.4.4	<i>Fourier transformaties</i>	12
2	Navier-Stokes vergelijkingen	13
2.1	Lagrangiaanse en Euleriaanse stelsels	13
2.1.1	<i>Lagrangiaanse stelsel</i>	13
2.1.2	<i>Wat is een vloeistofdeeltje?</i>	13
2.1.3	<i>Euleriaanse stelsel</i>	14
2.1.4	<i>Vloeistofeigenschappen en stelsels</i>	14
2.2	De materiële afgeleide	15
2.3	Behoud van massa en impuls	15
2.3.1	<i>Behoud van massa</i>	16
2.3.2	<i>Behoud van impuls</i>	16
2.3.3	<i>De spanningstensor σ: Cauchy's spanningsstelling</i>	17
2.3.4	<i>De spanningstensor σ: Symmetrie</i>	18
2.3.5	<i>Schuifspanning en druk</i>	18
2.4	Newtoniaans gedrag	19
2.4.1	<i>Aannames bij een Newtoniaanse vloeistof</i>	19
2.5	De Navier-Stokes vergelijkingen	20
2.5.1	<i>Viscositeit in het licht van statistische fysica</i>	20
2.6	Energiebehoud	22
2.7	Toestands- en constitutionele vergelijkingen	23
2.8	Samenvattend: de vergelijkingen	24
3	Potentiaalstromingen	25
3.1	Aannames	25
3.2	Samendrukbare ideale en rotatievrije stromingen	25
3.2.1	<i>De Euler vergelijkingen</i>	25
3.2.2	<i>De vergelijking van Bernoulli</i>	27
3.3	Potentialen en basisstromingen	27
3.3.1	<i>De stroomfunctie</i>	27

3.3.2	<i>De snelheidspotential</i>	30
3.3.3	<i>De complexe potential</i>	30
3.3.4	<i>Elementaire potentialstromingen</i>	32
3.4	Stroming rond een cilinder	32
3.4.1	<i>Stroming rond een cilinder zonder circulatie</i>	32
3.4.2	<i>Stroming rond een cilinder met circulatie</i>	34
3.4.3	<i>Krachten op een roterende cilinder</i>	34
3.5	Conforme afbeeldingen	36
3.5.1	<i>De Joukowski transformatie van cirkel naar vleugel</i>	37
4	Eenvoudige visceuze stromingen	43
4.1	Aannames	43
4.2	Parallele stromingen	43
4.2.1	<i>Vlakke Poiseuille stroming</i>	44
4.2.2	<i>'Falling film'</i>	44
4.3	Grenslaagstromingen	44
4.4	Stokes stromingen	47
4.4.1	<i>Stokes stroming om een bol</i>	47
5	Niet-Newtoniaanse vloeistoffen	51
5.1	Fenomenologie	51
5.1.1	<i>Spanningsafhankelijke viscositeit</i>	51
5.1.2	<i>Niet isotrope vloeistoffen</i>	52
5.1.3	<i>Visco-elastisch gedrag</i>	56
5.2	Kracht, vervorming en viscositeit	59
5.3	Spanningsafhankelijke viscositeit	59
5.3.1	<i>'Power-law' vloeistof</i>	61
5.3.2	<i>Bingham vloeistof</i>	62
5.4	Lineaire visco-elastische vloeistof	62
5.4.1	<i>Stationaire afschuifstroming</i>	64
5.4.2	<i>Terugspringen van een vloeistof</i>	64
6	Warmtetransport	67
6.1	De temperatuurvergelijking	67
6.2	Warmtetransport door conductie	68
6.2.1	<i>De Laplace transformatie</i>	68
6.2.2	<i>Warmtegeleiding in een half-oneindige staaf</i>	69
6.2.3	<i>De Fourier transformatie</i>	70
6.2.4	<i>Warmtegeleiding in een onbegrensd medium</i>	70
6.2.5	<i>Scheiding van variabelen</i>	72
6.2.6	<i>Warmte diffusie in sneeuw</i>	73
6.3	Warmtetransport door straling	73
6.4	Boussinesq benadering	75
6.4.1	Hydrostatische balans	75
6.4.2	Aannames	76
6.4.3	De Boussinesq vergelijkingen	76
6.5	Schalingsanalyse	77
6.6	Gedwongen convectie	78
6.6.1	<i>Warmtetransport bij gedwongen laminaire pijpstroming</i>	78
A	Wiskundig gereedschap	81
A.1	Vectoridentiteiten	81
A.2	Tensoridentiteiten	81
A.3	Integraal relaties	81
A.3.1	<i>Theorema van Stokes</i>	81

A.3.2	<i>Theorema van Gauss:</i>	81
A.3.3	<i>Circulatie</i>	81
A.4	Integraal transformaties	82
A.4.1	<i>Laplace transformaties</i>	82
A.4.2	<i>Fourier transformaties</i>	82
A.5	Differentiaalrelaties in verschillende coördinatenstelsels	83
A.5.1	<i>Bolcoördinaten 3-D</i>	83
A.5.2	<i>Cilindercoördinaten</i>	84
A.5.3	<i>Poolcoördinaten 2-D</i>	85
B	Werkcollege opgaven	87

Hoofdstuk 1

Inleiding

1.1 Leerdoelen

Voor het vak Stromingsleer en Transportverschijnselen zijn de volgende leerdoelen opgesteld:

- bekend raken met de Navier-Stokes en Boussinesq vergelijkingen;
- bekend raken met de processen die het transport van impuls, warmte, stof en energie in stromingen bepalen;
- elementaire kennis verkrijgen van de processen die het gedrag van deeltjes (bijv. colloïden) in vloeistoffen en stromingen bepalen;
- basiskennis verkrijgen van de stabiliteitstheorie van stromingen;
- kennis verkrijgen van de elementaire aspecten van de theorie van dynamische systemen en het transitiegedrag van laminaire naar turbulente stromingen;
- in staat zijn om een schalingsanalyse te maken van de grootte van termen in Navier-Stokes of Boussinesq vergelijkingen in een gegeven situatie om de dominante balansen in een stroming te identificeren;
- in staat zijn om elementaire stromingen en transportgrootheden (bijv. een warmteflux of een deeltjesflux) te kunnen berekenen.

In deze leerdoelen vallen een aantal begrippen op: transport, stabiliteit en schalingsanalyse. Voordat we deze leerdoelen kunnen vertalen naar concrete onderwerpen, moeten we deze begrippen enigszins helder hebben. Dat een vloeistof massa, energie en/of deeltjes kan transporteren is tamelijk evident. Welke rol ‘stabiliteit’ speelt en wat schalingsanalyse inhoudt, heeft wat extra inleidende uitleg nodig.

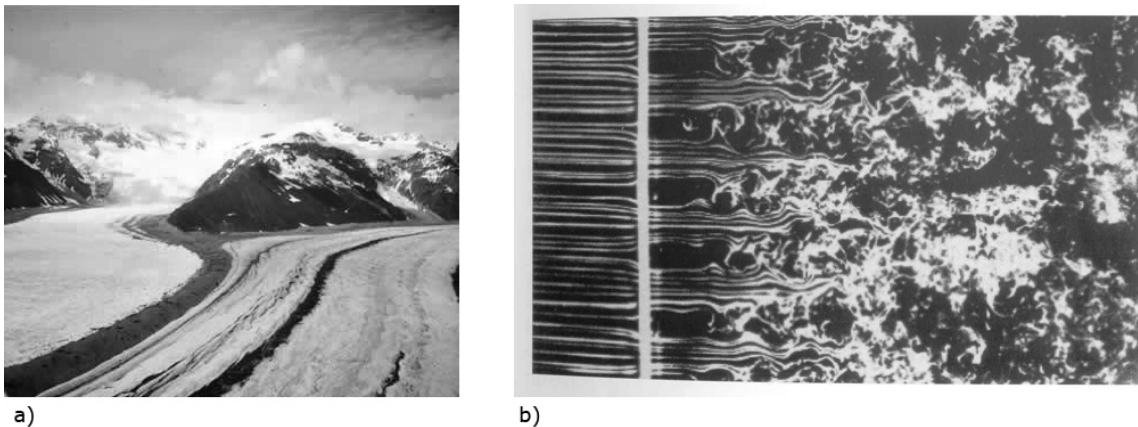
1.2 Inleidende en kaderende overwegingen

Om een exacte en altijd kloppende beschrijving van stromingen te maken, moeten alle krachten die op de vloeistof werken meegenomen worden. De praktijk leert dat dit een onwerkbaar complexe set vergelijkingen oplevert. Met de huidige rekenkracht van computers is tegenwoordig aardig wat mogelijk om toch oplossingen te krijgen. Echter, directe numerieke simulatie leert je weinig over het karakteristieke gedrag en de dominante processen in de stroming bepalen. Daarnaast zijn de berekeningen niet efficiënt als allerlei niet relevante processen worden meegenomen in de berekeningen. In de stromingsleer zoekt men daarom naar een goede formulering van de dynamica die ook nog steeds een hanteerbare set vergelijkingen geeft. Voor zo’n goede formulering van de dynamica van stroming zullen alle significante krachten die op de vloeistof werken in beschouwing moeten worden genomen. De kunst is om de dominante krachten te identificeren, dit kan dus per probleem verschillen.

1.2.1 *Laminaire versus turbulente stroming*

Voordat we in de analyse van formules en vergelijkingen duiken, is het dus goed om ons heen te kijken en te proberen te begrijpen welke processen en fenomenen relevant zijn. De eerste observatie die men kan maken, is dat er twee klassen vloeistofstromingen zijn: Laminair en turbulent

- de laminaire stromingen: rustige gelijkmatige



Figuur 1.1: a) Een voorbeeld van een zuiver laminaire stroming: een valleigletsjer. b) Het opwekken van isotrope turbulentie met behulp van een rooster. De vloeistof stroomt van links naar rechts.

bewegingen die in het algemeen alleen in de tijd variëren als de externe condities of krachten veranderen; deze stromingen kunnen in principe wiskundig nauwkeurig worden opgelost. Een voorbeeld van een strikt laminaire stroming is een gletsjer (Figuur 1.1a).

- de turbulente stromingen: chaotische bewegingen; de banen van individuele (vloeistof)deeltjes zijn niet te berekenen. Alleen statistische eigenschappen van de stroming kunnen analytisch bepaald worden. Een voorbeeld wordt gegeven door de opgewekte turbulentie achter een rooster (Figuur 1.1b).

In de geofysica komen turbulente stromingen zeer vaak voor. Belangrijke kenmerken van turbulentie zijn:

- turbulente stroming is onregelmatig, chaotisch en onvoorspelbaar;
- er is grote uitwisseling van impuls, warmte en massa;
- in turbulentie zijn krachten op vaste lichamen veel groter en is de wrijving veel groter dan in laminaire stromingen
- er is een grote verscheidenheid in tijd- en ruimteschalen in een turbulente stroming.

Dit onderscheid tussen turbulent en laminair is in de praktijk niet helemaal zwart-wit. In de praktijk zijn veel stromingen zwak turbulent, er is wel wat turbulente beweging maar het valt niet zo op. In de vloeistof kunnen wervels opgewekt worden, deze bestaan vervolgens een tijdje maar doven uiteindelijk uit. Er is dus blijkbaar naast een fysische mogelijkheid ook een aanleiding nodig. Zoals je hierboven kunt zien, veroorzaakt turbulentie een

grote uitwisseling van impuls, warmte en massa. Als er in de stromingen geen gradiënten in impuls of energie zijn, dan valt er voor de turbulente wervels ook niets te mengen. Turbulentie bestaat ook bij de gratie van het bestaan van grootschalige gradiënten in de vloeistof.

1.2.2 De ruimte- en tijdschalen van bewegende vloeistoffen

De mogelijkheid van het voorkomen van turbulentie hangt dus niet alleen af van het medium. Stromingen gedragen soms in bijna vergelijkbare situaties volkomen verschillend, en soms onvergelijkbare situaties bijna gelijk. Dit hangt af van het medium, ijs (zee Figuur 1.1a) stroomt nu eenmaal een stuk minder makkelijk dan water of lucht. Maar het hangt ook af van de krachten die op de vloeistofstroming werken, en de ruimte die de stroming heeft om zich in te bewegen.

De manier om de dominante krachten te vinden is met schaalanalyse, waarbij men kijkt naar de karakteristieke grootheden van bijvoorbeeld de ruimte- en tijdschalen van de stroming. Aan de hand daarvan kan men schattingen maken van de dominante processen in het tijdsbestek waarin men naar die stroming kijkt.

De drie belangrijkste schalen van beweging zijn: de lengteschaal (L), de snelheidsschaal (U) en de daarmee samenhangende tijdschaal (L/U). Bij de lengteschaal van een stroming is het duidelijk dat deze anders is voor een stroming in een buis dan voor een stroming in de oceaan. Dit geldt natuurlijk ook voor de snelheidsschaal. Als de lengte-

Tabel 1.1: *Enkele typische snelheden in uiteenlopende turbulente media*

Stromingsproces	Typische snelheid [m/s]
mantelconvectie in het inwendige van de aarde	10^{-10}
ijs in ijskap of gletsjer	10^{-7}
oceanstroming	10^{-2}
atmosferische circulatie	10^1
interstellair plasma	10^4

en snelheidsschaal zijn vastgelegd, is daarmee ook een tijdschaal van beweging vastgelegd: het is de verhouding van deze twee. In Tabel 1.1 worden een paar voorbeelden gegeven van hoe sterk de snelheidsschalen (m/s) uit elkaar kunnen lopen in verschillende geofysische stromingen. Uit deze getallen blijkt dat schalen zeer sterk van elkaar verschillen. Niettemin vertonen processen in die stromingen vaak een grote onderlinge gelijkenis (zie Figuur 1.2).

1.2.3 Fysische tijdschalen

Naast de tijdschalen van stromingen zelf, is het ook mogelijk om tijdschalen te identificeren die gebaseerd zijn op de fysische eigenschappen van het medium. Daarbij moeten we denken aan de viscositeit (ν) ('strokerigheid'), met een dimensie lengte maal snelheid zoals we straks zullen zien. Zonder hier nu in detail in te gaan op de dynamica, is het bijvoorbeeld mogelijk om met behulp van de lengteschaal van de stroming (L) en de viscositeit een tijdschaal te schatten waarover een in beweging gebrachte vloeistof tot rust komt: de tijdschaal van de wrijving, L^2/ν . We komen aan deze tijdschaal omdat dit de eenvoudigste relatie van L , eenheid [m], en ν , eenheid [$\text{m}^2 \text{s}^{-1}$], die de eenheid van tijd [s] heeft.

Er zijn meer van dit soort fysische eigenschappen zoals (moleculaire) warmtegeleiding, diffusie en magnetische eigenschappen, die alle hun eigen karakteristieke tijdschalen hebben. Bij geofysische stromingen is de rotatie van de aarde, (Ω), (rad/s) erg belangrijk, maar in dit vak zullen we rotatie juist *niet* bekijken, dat is de kern van het vak Geofysische stromingsleer (NS-353B). Een andere sturend proces in vloeistofstroming zijn dichtheidsverschillen. Deze dichtheidsverschillen zijn bijvoorbeeld ontstaan door verwarming of afkoeling in een vloeistof. Op zich veroorzaakt een dichtheidsverschil niet direct een kracht, echter, in een zwaartekrachtveld leidt een dichtheidsverschil tot Archimedes krachten ('buoyancy'). Ook

bij dit proces wordt een typerende tijdschaal ingevoerd waarbij de dichtheidsverschillen en zwaartekracht een rol spelen. In Tabel 1.2 worden alle bovenstaande tijdschalen opgesomd.

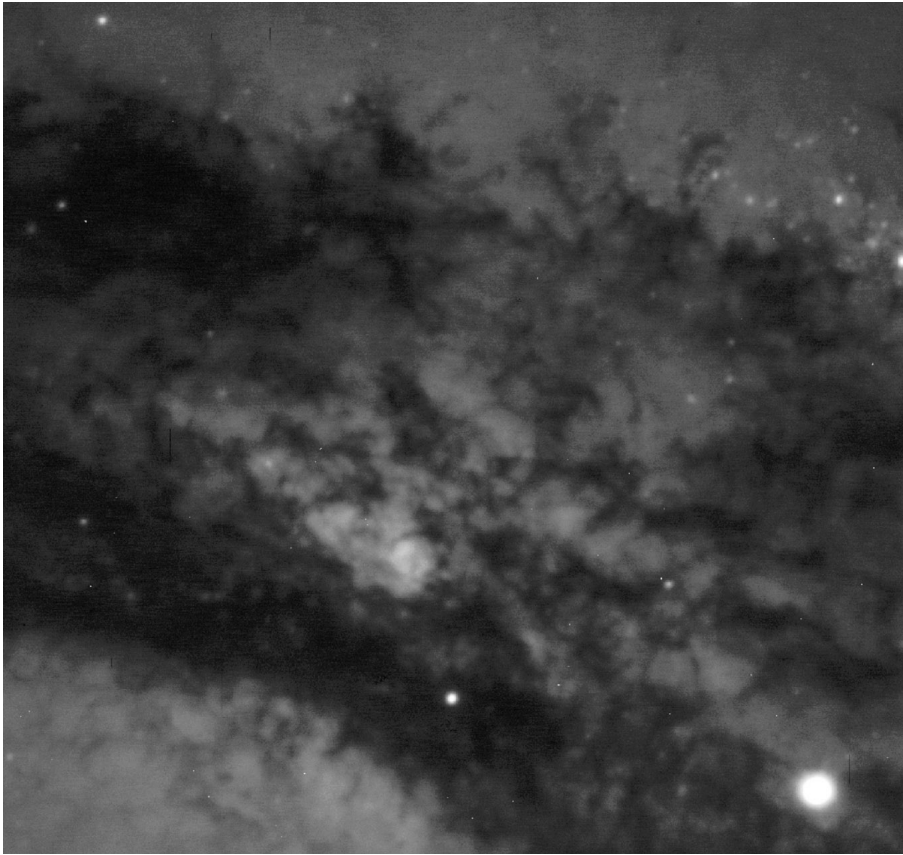
1.2.4 Dimensieloze getallen

Er zijn dus verschillende karakteristieke schalen voor de stroming zelf en voor zijn fysische eigenschappen. Uit de verhoudingen (dimensieloze getallen) kunnen we opmaken welke processen wel en niet belangrijk zullen zijn.

Een voorbeeld: om te bepalen of in een stroming de viscositeit wel of niet belangrijk is, wordt de verhouding van de tijdschalen van viscositeit en beweging bekeken. Deze verhouding levert het Reynoldsgetal: UL/ν . Als het Reynoldsgetal heel groot is, en dus het effect van viscositeit klein is, zijn alleen de tijdschalen van de beweging van belang, de viscositeit hoeft dus niet in beschouwing genomen te worden. Is daarentegen het Reynoldsgetal heel klein, dan zijn de visceuze krachten belangrijker en zullen deze in de beschrijving van een proces naar voren moeten komen. Het Reynoldsgetal zal in dit dictaat nog vaak genoemd worden.

Het Reynoldsgetal is zeer belangrijk bij het analyseren of een stroming turbulent kan zijn. Het Reynoldsgetal van de gletsjer in Figuur 1.1a is ordes kleiner dan 1, turbulent gedrag is ook ondenkbaar bij een gletsjer. In bijna alle water- en gasstromingen komt turbulentie voor. Het Reynoldsgetal van deze stromingen is voor alle turbulente stromingen vele ordes groter dan 1. Turbulentie kan dus alleen voorkomen als turbulente snelheidsgradiënten niet direct worden weg gediffundeerd door moleculaire diffusie.

Een ander voorbeeld van een dimensieloos getal is te vinden bij aardrotatie. Voor geofysische stromingen is de vraag relevant wanneer het van belang is om de rotatie van de aarde mee te nemen in de beschrijving van een stroming. De aarde maakt



Figuur 1.2: *Stofband in Centaurus A. De complexe turbulente structuur is vermoedelijk het gevolg van een botsing tussen twee sterrenstelsels met veel gasvormig materiaal (zie <http://www.eso.org/public/images/eso9820f/>). De visuele structuur is niet heel veel verschillend van een wolkendeek of een rookpluim, hoewel de tijd- en ruimteschalenschalen van deze stofband daarmee vele ordes van grootte verschillen.*

een omwenteling per dag, dus roteert 2π radialen per dag, dus circa $10^{-4} \text{ rad s}^{-1}$). Het Rossbygetal is het dimensieloze getal dat de tijdschaal van de rotatie en de tijdschaal van het medium (oceaan, atmosfeer, aardmantel) vergelijkt.

Een dimensieloos getal dat aangeeft of er een belangrijk verschil is tussen transport van impuls van een stroming en het transport van warmte, is het Prandtl getal. Zo zijn er nog vele andere dimensieloze getallen die het relatieve belang vastleggen van de verschillende krachten die op een vloeistof inwerken. Als deze bepaald zijn kunnen (bij benadering) de bewegingsvergelijkingen opgesteld worden. Hierbij is de wet van Newton uitgangspunt, en worden alle krachten in de stroming op een verstandige manier gekozen, dus met weglating van die krachten die geen rol van betekenis spelen. Zo blijft er uiteindelijk een beperkte, complexe differentiaalvergelijking over, waarmee de stroming bij benadering beschreven kan wor-

den.

1.2.5 *Turbulentie*

Turbulentie is de belangrijkste reden waarom vloeistofdynamica gecompliceerd is. Stromingen worden turbulent als niet-lineaire krachten domineren. Dit is voor veel stromingsproblemen het geval. De niet-lineaire krachten leiden dan tot instabiliteit van de stroming en uiteindelijk chaotisch gedrag. De formulering van turbulentie is nog steeds niet rond, en zal waarschijnlijk ook nooit analytisch volledig gegrepen gaan worden. Turbulentie kan slechts bij benadering wiskundig geanalyseerd worden.

Gezien de beperkte tijd binnen en het inleidende karakter van deze cursus, is ervoor gekozen om de analyse van turbulentie niet tijdens dit vak te bespreken. We zullen ons beperken tot lami-

Tabel 1.2: Tijdschalen voor een aantal fysische eigenschappen en processen. In de derde kolom staan deze in dimensieloze vorm (in verhouding tot de stromingstijdschaal L/U). De vierde kolom bevat de gangbare afkorting van de naam van het betreffende kengetal. De afkortingen *Re*, *Pr*, *Sc*, *Ro*, *Fr* staan voor respectievelijk het Reynolds-, Prandtl-, Schmidt-, Rossby- en Froudegetal.

grootheid	corresponderende tijdschaal, τ	dimensieloze tijdschaal $\frac{\tau}{L/U}$	naam kengetal
viscositeit (ν)	L^2/ν	UL/ν	Re
warmtegeleiding (κ)	L^2/κ	$(UL/\nu) \times (\nu/\kappa)$	$Re \times Pr$
deeltjesdiffusie (γ)	L^2/γ	$(UL/\nu) \times (\nu/\gamma)$	$Re \times Sc$
(aard)rotatie (Ω en/of f)	Ω^{-1}	$U/(L\Omega)$	Ro
Archimedeskracht	$\{L/(g\Delta\rho/\rho)\}^{1/2}$	$\{\frac{U^2}{gL}\Delta\rho/\rho\}^{1/2}$	Fr

naire stromingen en de transportverschijnselen in deze stromingen. Wel zullen we stil staan bij de stabiliteit van laminaire stromingen.

1.3 Opbouw college

De cursus Stromingsleer en transportverschijnselen heeft de volgende opbouw. Merk op dat de weekindeling indicatief is.

- Week 1: Inleiding, herhaling en introductie Navier-Stokes vergelijkingen.
- Week 2+3: Elementaire laminaire stromingen: potentiaal, parallelle en Stokes stromingen.
- Week 4+5: Mechanismen in warmtetransport: diffusie, straling en advection (Boussinesq vergelijkingen)
- Week 6+7: Gedrag van deeltjes in vloeistoffen en stromingen: Einstein en Brownse beweging.
- Week 8+9: Stabiliteit van stromingen: Rayleigh-Bérnard Convection en Taylor-Couette stroming.

1.4 Wiskunde: notatie & voorkennis

1.4.1 Differentiaalvergelijkingen

De wiskundige analyse van stromingen leunt zeer sterk op de analyse van differentiaalvergelijkingen. In die zin wijkt de stromingsleer niet af van de klassieke en relativistische mechanica. De techniek van het bewerken en oplossen van differentiaalvergelijkingen is een veel gebruikte basisvaardigheid in de studie Natuurkunde (en Sterrenkunde). Voor NAST en TWIN studenten zal

dit aspect van deze cursus dus niet bijzonder ingewikkeld zijn. Voor studenten vanuit andere studies, daarentegen, is het essentieel om hier geoefend te raken. De praktijk heeft uitgewezen dat het behalen van dit vak staat of valt met het goed omgaan met differentiaalvergelijkingen.

1.4.2 Complexe getallen

Ook de betekenis en het gebruik van complexe getallen wordt bekend verondersteld. Complexe getallen worden gebruikt bij de analyse van potentiaalstromingen (Hoofdstuk 3) en bij de analyse van periodieke oplossingen van differentiaalvergelijkingen. Mocht het gebruik van complexe getallen nog onbekend zijn, dan is het goed om zich daarin zelfstandig te verdiepen. Hoewel complexe getallen intuïtief kan lijken op 2D vectoren, gedragen complexe getallen bij vermenigvuldigen toch totaal anders.

1.4.3 Tensor, vector en matrixnotatie

Vloeistofstroming is bij uitstek een proces dat zich in meerdere dimensies afspeelt. Over het algemeen zijn stromingen 3-D, maar in dit dictaat beperken we ons vaak tot 2-D stromingen. In beide gevallen zijn grootheden zoals plaats en snelheid geen scalars, één-dimensionale getallen, maar vectoren. In dit dictaat worden vectoren genoteerd met een pijl, bijvoorbeeld $\vec{u}$. Matrices worden dik genoteerd, bijvoorbeeld $\boldsymbol{\tau}$.

Met het gebruik van matrices komt bij stromingsleer een beetje tensorrekenen voorbij. Tensoralgebra kan zeer complex zijn, hier echter maken we alleen gebruik van zeer eenvoudige wiskundige toepassingen. De belangrijkste eigenschap van een tensor is zijn rang (Engels, 'or-

der' / 'rank') en de dimensie. Een scalar, vector en matrix zijn respectievelijk een nulderangstensor, eersterangstensor en tweederangstensor. Wanneer een drie dimensionale ruimte wordt beschouwd, hebben deze scalar, vector en matrix 1, 3 en 9 componenten. In de stromingsleer komen alleen zeer sporadisch tensoren met rang van 3 of hoger voor. Verder komen in de vergelijkingen producten tussen twee matrices ook nauwelijks voor, vooral het inproduct tussen een vector en een matrix komt voor. De tensoralgebra in de stromingsleer is verder eenvoudig omdat matrixes over het algemeen symmetrisch zijn. De complexiteit van de tensorberekeningen is daarom niet te vergelijken met de complexiteit van de algebra bij algemene relativiteitstheorie.

Voor vectoren en vectorvergelijkingen zijn er verschillende notatiemethoden. In dit dictaat gebruiken we zowel vectornotatie als matrixnotatie. Concreet, de snelheidsvector kunnen we schrijven als $\vec{u}$, maar ook als u_i , waarbij $i = 1, 2, 3$ (voor de drie dimensies). Een verder willekeurige niet-fysische vergelijking in vectornotatie ziet er bijvoorbeeld zo uit:

$$\vec{u} = \vec{u}(\nabla \cdot \vec{u});$$

en in matrixnotatie ziet deze vergelijking er zo uit:

$$u_j = u_j \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_i} \right).$$

In de bovenstaande vergelijking is ∇ een vectoroperator die de daaropvolgende functie in drie dimensies differentieert. Hoewel een vectoroperator een vector is, wordt in dit dictaat boven de ∇ het vectorteken weggelaten. Zie verder Appendix A.1 voor een aantal vectorrelaties en A.2 voor de notatie van matrixoperaties.

Bij de matrixnotatie passen we ook de Einstein sommatieconventie toe. De conventie houdt in dat als er twee dezelfde indices aan één kant van de vergelijking staan, we veronderstellen dat we over deze index sommeren. In dit geval is dat over de index i . Overigens, in vectornotatie is het erg belangrijk waar de haakjes staan, $\vec{u}(\nabla \cdot \vec{u}) \neq (\vec{u} \cdot \nabla)\vec{u}$. Tenslotte, in complexe vergelijkingen wordt soms matrixnotatie in vectorvergelijkingen gebruikt, omdat een tussenweg dan de overzichtelijkste manier van noteren geeft.

1.4.4 Fourier transformaties

Bij de analyse van warmtetransport in stilstaande media kan het gebruik van Fourier transformatie een effectieve manier zijn om een oplossing te vinden. In die context wordt de Fourier transformatie – en ook de Laplace transformatie – geïntroduceerd. Ook hier zullen we niet lang bij de wiskundige kant van de techniek stilstaan, het gaat in dit vak om de natuurkundige toepassing.

Hoofdstuk 2

Navier-Stokes vergelijkingen

In dit hoofdstuk leiden we voor Newtoniaanse vloeistoffen de behoudswetten van massa, impuls en energie af. De impulsvergelijkingen van deze set behoudswetten wordt de Navier-Stokes vergelijkingen genoemd. Voor we echter deze vergelijkingen kunnen opstellen, moeten een paar belangrijke details besproken worden: het Lagrangiaans gedrag van vloeistofeigenschappen in een Euleriaans stelsel; de spanningstensor en wat Newtoniaans gedrag van een vloeistof is.

2.1 Lagrangiaanse en Euleriaanse stelsels

2.1.1 Lagrangiaanse stelsel

In een Lagrangiaanse beschrijving wordt de plaats van elk vloeistofelement gegeven in de vorm van een trajectorie ('trajectory') als functie van de tijd. Men gaat uit van een aanvangstijdstip $t = t_0$, waarop de plaats van een vloeistofdeeltje door $\vec{a}$ wordt gekenmerkt. De onafhankelijke parameters zijn dus $\vec{a}$ en t , waarbij $\vec{a}$ dus de startpositie van dit deeltje is. De afhankelijke parameters zijn deeltjeseigenschappen zoals positie en snelheid van het vloeistofelement. De positie wordt beschreven met de tijdsafhankelijke coördinatenvector $\vec{X}$. In formulevorm wordt de baan van een vloeistofdeeltje gegeven door:

$$\vec{X}(t, \vec{a}) \quad (2.1)$$

met $\vec{X} = \vec{a}$ voor $t = 0$. De snelheid in de Lagrangiaanse beschrijving is gedefinieerd als de snelheid

van een vloeistofelement:

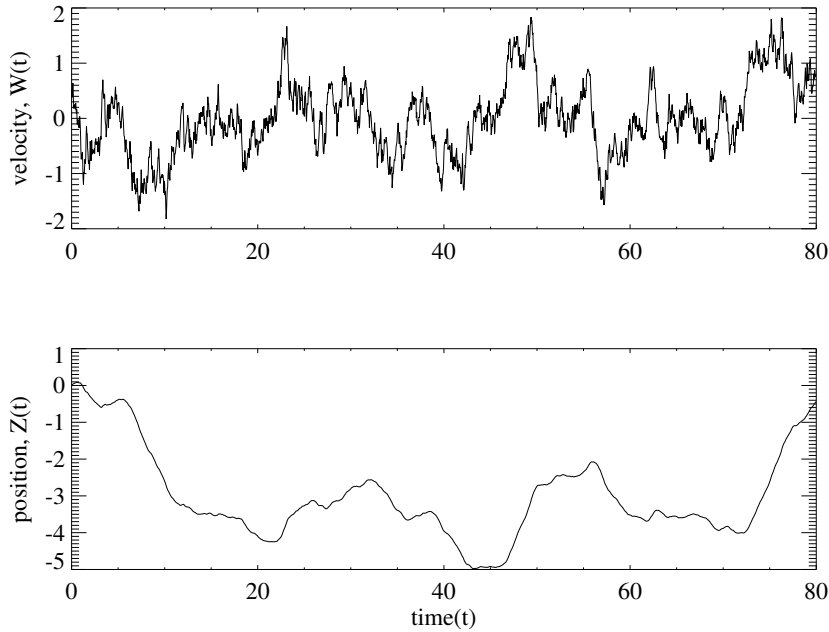
$$\vec{V}(t, \vec{a}) = \frac{\partial \vec{X}(t, \vec{a})}{\partial t} \quad (2.2)$$

Een *stroomlijn* is gedefinieerd als de raaklijn aan de baan en heeft dus voor ieder moment de richting van de snelheid.

Een *strijklijn* is de kromme die ontstaat door alle vloeistofelementen die eens door een bepaald punt gegaan zijn, met elkaar te verbinden. Je kan je dit voorstellen door bijvoorbeeld met een injectienaald kleurstof in de stroming te brengen. De gekleurde lijn die dan ontstaat, is een strijklijn. In een stationaire stroming, waarbij de *lokale* eigenschappen van de stroming niet van de tijd afhangen, vallen trajectorie, strijk- en stroomlijn samen.

2.1.2 Wat is een vloeistofdeeltje?

Een vloeistofdeeltje is een mathematisch concept. Het is zo klein dat de eigenschappen ($\vec{u}$, T , ...) homogeen zijn, maar ook weer niet zo klein dat de vloeistof niet meer macroscopisch kunnen benaderen. Elke vloeistof bestaat uit individuele moleculen die op hoge snelheid al botsend random in de ruimte bewegen. 'Macroscopisch benaderen' houdt in dat we het gedrag van het vloeistofdeeltje niet meer afhangt van het gedrag van individuele moleculen, maar van statische eigenschappen van de verzameling. Temperatuur relateert de gemiddelde snelheid van de moleculen en stroming relateert aan de gemiddelde verplaatsing van de moleculen. Maar niets houdt moleculen tegen om uit het vloeistofdeeltje te bewegen. Een trajectorie van een vloeistofdeeltje komt dus niet overeen



Figuur 2.1: De verticale snelheid (a) en positie (b) van een vloeistofdeeltje dat op $t = 0$ de oorsprong verliet. Merk op dat de gemiddelde snelheid vrijwel nul is.

met het gemiddelde van de trajectories van de moleculen die initieel dat vloeistofdeeltje vormden.

In het algemeen gaan we ons dus niet richten op individuele deeltjes maar op het macroscopische proces. De uitzondering is de bespreking van colloïden, waar we gaan kijken hoe individuele, grote deeltjes bewegen onder invloed van de kleinere deeltjes om hen heen. Dan nog steeds is niet echt de exacte baan van een colloïde interessant, maar het gemiddelde gedrag van deze colloïde.

Figuur 2.1 is een voorbeeld van (a) de 1D snelheid en (b) locatie van een individueel deeltje. In dit geval is het een eenvoudige numerieke simulatie van de beweging van een deeltje¹. In principe zouden we vloeistofstromingen kunnen beschrijven als een veel-deeltjes systeem. Echter, in de praktijk is dit bijzonder complex, o.a. omdat niet a priori duidelijk is welke deeltjes wanneer met elkaar interacteren. Het is dus veelal onmogelijk om een analytische beschrijving voor een vloeistof

strooming te krijgen als een Lagrangiaans stelsel wordt gebruikt².

2.1.3 Euleriaanse stelsel

In een Euleriaans stelsel geven we op elk moment een complete ruimtelijke beschrijving van het stromingsveld ten opzichte van een vast assenstelsel. De onafhankelijke parameters zijn de coördinaten $\vec{x}$ en t . De afhankelijke parameters zijn de eigenschappen van het stromingsveld, bijvoorbeeld de snelheid of de druk. In formulevorm wordt de beschrijving van het snelheidsveld op ieder tijdstip en plaats gegeven door $\vec{u}(\vec{x}, t)$.

2.1.4 Vloeistofeigenschappen en stelsels

Hoewel we een vloeistof niet in statische losse pakketjes kunnen opdelen, zijn de eigenschappen

¹De simulatie heeft een paar eigenschappen die voor nu niet bijzonder interessant zijn: De snelheid heeft enige autocorrelatie, dus er is een positieve correlatie tussen $u(t)$ en $u(t + \epsilon)$, waarbij $\epsilon > 0$. In Figuur 2.1 wordt 1 realisatie van het model getoond waarbij het deeltje op enige afstand van het startpunt ($z = 0$) komt. Gemiddeld genomen over vele realisaties blijft gemiddelde lokatie op ieder tijdstip (dus $\langle Z(t) \rangle$) gelijk aan het startpunt $z = 0$: er is geen gemiddelde verplaatsing. Echter, de deeltjes raken over de tijd wel steeds verder verspreid rond het startpunt, in dit geval is deze dispersie gelijk aan $\langle Z(t)^2 \rangle = t$. Omdat het model aan deze laatste twee eigenschappen voldoet ($\langle Z(t) \rangle = 0$ en $\langle Z(t)^2 \rangle = t$) is dit een voorbeeld van een 'Wiener proces'.

²Ondanks dat vloeistofstromingen dus Euleriaans beschreven gaan worden, kan een deeltjesbenadering soms zeer nuttig blijken. Zie bijvoorbeeld de Lattice Boltzmann methode (http://en.wikipedia.org/wiki/Lattice_Boltzmann_methods).

toch gerelateerd aan individuele vloeistofpakketjes. Eigenschappen zoals temperatuur of momentum zijn gerelateerd aan dat betreffende vloeistofpakketje, en niet aan de plaats waar dat pakketje zich op dat moment bevindt. Met dit argument lijkt een beschrijving van vloeistofdynamica in een Lagrangiaans stelsel een logische keuze. Dit is in het begin van de ontwikkeling van de vloeistofdynamica ook geprobeerd, maar men kwam er al snel achter dat er dan geen goede analytische beschrijving mogelijk was. Vervolgens probeerde men, onder andere Leonhard Euler, een beschrijving van vloeistofstromingen in een Euleriaans stelsel te maken. Hierin is men wel succesvol geweest, zoals uit dit dictaat zal blijken. Echter, het feit dat we een vloeistof met eigenschappen die zich ‘Lagrangiaans’ door de ruimte bewegen in een Euleriaans stelsel vatten, heeft natuurlijk belangrijke invloed op hoe die vergelijkingen er uit zien.

2.2 De materiële afgeleide

Het is dus van belang dat we variabelen beschreven in een Lagrangiaans en Euleriaans stelsel aan elkaar kunnen verbinden. De Lagrangiaanse en Euleriaanse snelheid zijn gekoppeld volgens:

$$\vec{V}(t; t_0) = \vec{u}(\vec{X}(t, \vec{a}), t). \quad (2.3)$$

Bij de beschrijving van de dynamica van stromingen gaan we uit van stelsels van vergelijkingen voor een aantal stromingsvariabelen als functie van plaats en tijd, zoals snelheid (3 componenten $u_i (i = 1, 2, 3)$), druk (p), dichtheid (ρ) en temperatuur (T).

In één dimensie wordt de tijdsafgeleide van de variabele $u(x, t)$, de versnelling du/dt , gegeven door:

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial^2 X}{\partial t^2} = \frac{\partial u}{\partial t} \Big|_X = \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial X} \frac{\partial X}{\partial t}. \quad (2.4)$$

In deze vergelijking is X de plaats van ons vloeistofelementje (2.1). De versnelling van dit elementje is gelijk aan de verandering van de snelheid in het meebewogen Lagrangiaanse stelsel X . Als we dit met de kettingregel overschrijven naar het Euleriaanse stelsel x , dan vinden we twee termen. De eerste term rechts is de lokale versnelling, de tweede de advectionele versnelling. Omdat voor het moment t , X en x qua locatie samenvallen, leidt (2.4) tot:

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x}. \quad (2.5)$$

In het algemeen kan de operator d/dt dus geschreven worden als

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial x}. \quad (2.6)$$

In drie dimensies is de notatie voor de differentiaaloperator d/dt

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + u_i \frac{\partial}{\partial x_i}, \quad (2.7)$$

of in vectornotatie

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \vec{u} \cdot \nabla. \quad (2.8)$$

Men noemt dit de meebewogen, materiële of convectieve afgeleide. Materiële afgeleide is de gangbare naam. Overigens, in het Engels heet de materiële afgeleide naast material derivative ook *total derivative*, wat zich natuurlijk snel laat verbasteren tot totale afgeleide.

Is f een eigenschap in de stroming dan geldt dus:

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \nabla) f. \quad (2.9)$$

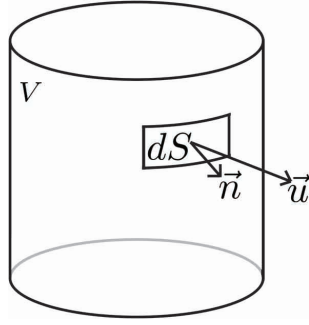
De locale verandering van f wordt dus gegeven door $\partial f / \partial t$. In een stationaire stroming is deze term 0. De term $(\vec{u} \cdot \nabla) f$ is de verandering van f als we met de stroom meebewegen. $(\vec{u} \cdot \nabla) f = 0$ betekent dus dat f langs de baan niet verandert. Zo betekent $df/dt = 0$ dat de eigenschap f constant is voor het beschouwde vloeistofelementje. In dat geval is f een behouden grootheid.

2.3 Behoud van massa en impuls

Behoudswetten in een vloeistof kunnen in algemene zin als volgt worden afgeleid met de volgende analyse. Laat Ψ een vloeistofeigenschap zijn, bijvoorbeeld dichtheid of temperatuur. De verandering van Ψ in het volume V (zie Figuur 2.2), tengevolge van in- of uitstroom en bronnen of putten van Ψ , wordt dan gegeven door

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \Psi \, dV = - \int_S \Psi \, \vec{u} \cdot \vec{n} \, dS + \int_V S(\Psi) \, dV, \quad (2.10)$$

waarin $S(\Psi)$ een eventuele bron- of verliesterm is. De stroom (flux) van Ψ door het oppervlakje S



Figuur 2.2: Willekeurig volume-elementje (volume V , oppervlak S) in de stroming.

met orientatie $\vec{n}$ wordt gegeven door $\Psi \vec{u} \cdot \vec{n}$. Met behulp van de stelling van Gauss kunnen we dit herschrijven als:

$$\int_V \left(\frac{\partial \Psi}{\partial t} + \nabla \cdot (\Psi \vec{u}) \right) dV = \int_V S(\Psi) dV,$$

en vervolgens, met de kettingregel,

$$\int_V \left(\frac{\partial \Psi}{\partial t} + \vec{u} \cdot \nabla \Psi + \Psi \nabla \cdot \vec{u} \right) dV = \int_V S(\Psi) dV.$$

Omdat $\partial \Psi / \partial t + \vec{u} \cdot \nabla \Psi \equiv d\Psi / dt$, vinden we uiteindelijk

$$\int_V \left(\frac{d\Psi}{dt} + \Psi \nabla \cdot \vec{u} \right) dV = \int_V S(\Psi) dV, \quad (2.11)$$

de behoudswet voor Ψ in het denkbeeldige volume V .

2.3.1 Behoud van massa

De continuïteitswet kan nu eenvoudig worden afgeleid door $\Psi = \rho$ te kiezen. Massacreatie of annihilatie is in de stromingsleer niet aan de orde, dus er zijn geen bronnen of putten van massa. Vergelijking (2.11) wordt dan

$$\int_V \left(\frac{d\rho}{dt} + \rho \nabla \cdot \vec{u} \right) dV = 0,$$

en omdat dit moet gelden voor iedere willekeurig volume volgt

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \nabla \cdot \vec{u} = 0, \quad (2.12)$$

dit is de continuïteitsvergelijking.

2.3.2 Behoud van impuls

De wet van behoud van impuls, dus de tweede wet van Newton, volgt op analoge wijze door $\Psi = \rho \vec{u}$ te kiezen. Omdat er in het algemeen krachten zullen werken op een vloeistof, zal het rechterlid van (2.11) ongelijk 0 zijn. Als we onderscheid maken tussen krachten die op het oppervlak en het volume werken, respectievelijk $\vec{F}_{opp}$ en $\vec{F}_{vol}$, dan is

$$S(\rho \vec{u}) = \int_S \vec{F}_{opp} dS + \int_V \vec{F}_{vol} dV.$$

Merk op dat de vector $\vec{F}_{opp}$ de normaalvector ($\vec{n}$), die wel aanwezig in vergelijking (2.10), in zich opgenomen heeft. Omdat de behoudsvergelijking voor impuls een vector vergelijking is, moet uit dit inproduct van de oppervlaktekracht en deze normaalvector een vector volgen. Hieruit volgt dus dat de oppervlaktekracht een tensor (matrix) moet zijn³. Deze oppervlaktekrachtensor gaan we in secties 2.3.3 en 2.3.4 nog nader bekijken. Als we de eerste term in het rechterlid herschrijven van $\vec{F}_{opp} = \boldsymbol{\sigma} \cdot \vec{n}$ en daarop de stelling van Gauss toepassen, dan volgt uit 2.11

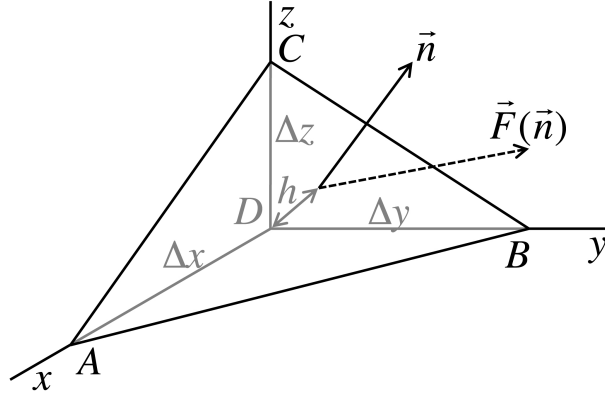
$$\int_V \left(\frac{d(\rho \vec{u})}{dt} + \rho \vec{u} \nabla \cdot \vec{u} \right) dV = \int_V \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \vec{F}_{vol} dV.$$

Met de kettingregel kunnen we de materiële afgeleide van $\rho \vec{u}$ uitschrijven; na hergroepering van deze termen krijgen we

$$\int_V \left[\rho \frac{d\vec{u}}{dt} + \vec{u} \left(\frac{d\rho}{dt} + \rho \nabla \cdot \vec{u} \right) \right] dV = \int_V \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \vec{F}_{vol} dV. \quad (2.13)$$

Uit de continuïteitsvergelijking (2.12) volgt dat de term tussen haakjes in de linker integrand 0 is. Omdat de resulterende vergelijking moet gelden

³De oppervlaktekracht zou mathematisch ook een scalar kunnen zijn, maar dat is fysisch niet logisch.



Figuur 2.3: Geometrie van oppervlaktekrachten op een viervlak (tetraeder).

voor elk volume, kunnen we de integraal weglaten, en vinden we

$$\rho \frac{d\vec{u}}{dt} = \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \vec{F}_{vol}, \quad (2.14)$$

de tweede wet van Newton toegepast op een vloeistof.

2.3.3 De spanningstensor $\boldsymbol{\sigma}$: Cauchy's spanningsstelling

In de vorige sectie hebben we aangenomen dat spanning kan worden weergegeven met een 2^e orde tensor. Deze aanname wordt beschreven in Cauchy's spanningsstelling

$$\vec{F}(\vec{n}) = \vec{n} \cdot \boldsymbol{\sigma} \quad (2.15)$$

of in Einsteinnotatie⁴

$$F_j(\vec{n}) = \sigma_{ij} n_i.$$

Deze stelling betoogt dat de kracht op een oppervlak verandert met de oriëntatie van het oppervlak, maar daarin wel maar 9 vrijheidsgraden.

Om te bewijzen dat je met deze spanningstensor de krachten op elk willekeurig oppervlak kan beschrijven, bekijken we viervlak (Figuur 2.3). De krachtenbalans voor dit viervlak, de tweede wet van Newton, wordt gegeven door

$$\begin{aligned} \vec{F}(\vec{n})O_{ABC} - \vec{F}(\vec{e}_1)O_{BCD} - \vec{F}(\vec{e}_2)O_{ACD} \\ - \vec{F}(\vec{e}_3)O_{ABD} = \rho \left(\frac{h}{3} O_{ABC} \right) \vec{a}, \end{aligned}$$

waarbij O_x het oppervlak van de betreffende driehoek aangeeft; ρ de dichtheid van de materie en $\vec{a}$

de versnelling van het driehoekje. We kunnen de drie oppervlaktes van de zijvlakken relateren aan O_{ABC} via

$$\begin{aligned} O_{BCD} &= (\vec{n} \cdot \vec{e}_x) O_{ABC} = n_x O_{ABC} \\ O_{ACD} &= (\vec{n} \cdot \vec{e}_y) O_{ABC} = n_y O_{ABC} \\ O_{ABD} &= (\vec{n} \cdot \vec{e}_z) O_{ABC} = n_z O_{ABC} \end{aligned}$$

Dit kunnen we substituëren in de bovenstaande vergelijking, en vervolgens O_{ABC} wegdelven:

$$\vec{F}(\vec{n}) - \vec{F}(\vec{e}_x)n_x - \vec{F}(\vec{e}_y)n_y - \vec{F}(\vec{e}_z)n_z = \rho \frac{h}{3} \vec{a}.$$

Als we de limiet nemen waarbij het viervlak infinitesimaal klein maken, en h 0 wordt, vinden we

$$\vec{F}(\vec{n}) = \vec{F}(\vec{e}_x)n_x + \vec{F}(\vec{e}_y)n_y + \vec{F}(\vec{e}_z)n_z.$$

Dit toont dus aan dat de spanning een willekeurig vlak is een lineaire combinatie van de spanningen op de orthogonale vlakken loodrecht op de drie basisvectoren.

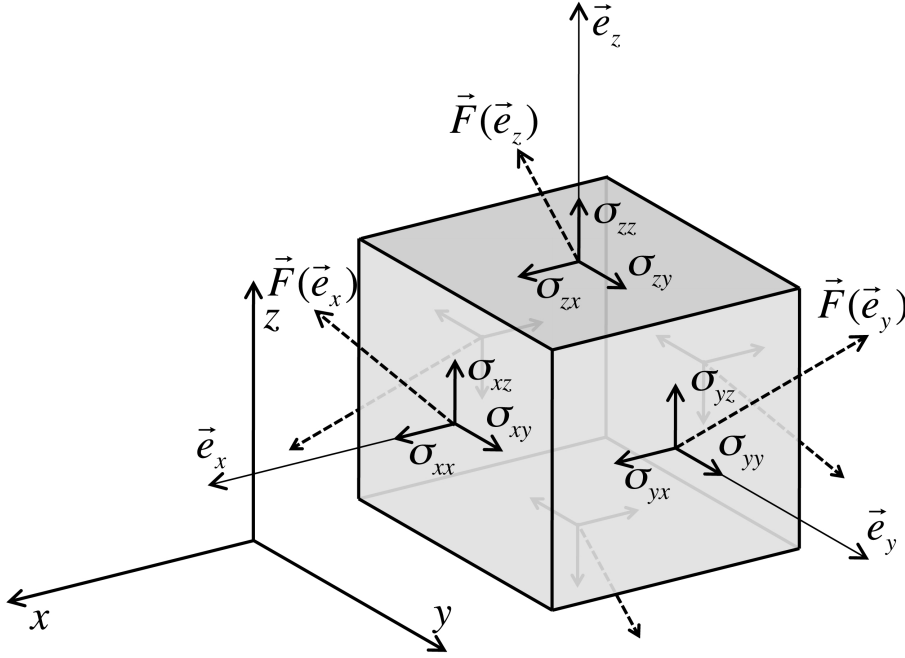
Om te laten zien dat we deze spanningvectoren in een tensor kunnen schrijven, bekijken we de krachtenvectoren op de basisvlakken van een eenheidskubus (Figuur 2.4):

$$\begin{aligned} \vec{F}(\vec{e}_x) &= F_x(\vec{e}_x)\vec{e}_x + F_y(\vec{e}_x)\vec{e}_y + F_z(\vec{e}_x)\vec{e}_z \\ &= \sigma_{xx}\vec{e}_x + \sigma_{xy}\vec{e}_y + \sigma_{xz}\vec{e}_z \\ \vec{F}(\vec{e}_y) &= \dots = \sigma_{yx}\vec{e}_x + \sigma_{yy}\vec{e}_y + \sigma_{yz}\vec{e}_z \\ \vec{F}(\vec{e}_z) &= \dots = \sigma_{zx}\vec{e}_x + \sigma_{zy}\vec{e}_y + \sigma_{zz}\vec{e}_z, \end{aligned}$$

wat in indexnotatie is

$$\vec{F}(\vec{e}_i) = T_j(\vec{e}_i)\vec{e}_j = \sigma_{ij}\vec{e}_j.$$

⁴Om even over na te denken: 1) waarom is het niet $F_j(\vec{n}) = \sigma_{ji}n_i$? 2) Zou het uitmaken?



Figuur 2.4: De componenten van de Cauchy spanningstensor.

Als we dit invullen in de bovenstaande vergelijking, dan vinden we:

$$\begin{aligned}\vec{F}(\vec{n}) &= \vec{F}(\vec{e}_x)n_x + \vec{F}(\vec{e}_y)n_y + \vec{F}(\vec{e}_z)n_z \\ &= \sum_{i=1}^3 \vec{F}(\vec{e}_i)n_i = (\sigma_{ij}\vec{e}_j)n_i \\ &= \sigma_{ij}n_i\vec{e}_j,\end{aligned}$$

wat gelijk is aan

$$F_j(\vec{n}) = \sigma_{ij}n_i,$$

wat de indexnotatie van de Cauchy's spanningsstelling is (2.15).

2.3.4 De spanningstensor σ : Symmetrie

De spanningstensor heeft dus negen elementen, maar daar zijn er maar zes van onafhankelijk. Om dit aan te tonen, kijken we opnieuw naar een kubus (Figuur 2.4). Het koppel ('torque') $\vec{T}$ dat op een kubus (met ribbe Δx) wordt uitgeoefend wordt gegeven door

$$\vec{T} = \sum_{i=1}^3 2 \cdot \frac{1}{2} \Delta x \vec{e}_i \times \Delta x^2 \vec{F}(\vec{e}_i) = \Delta x^3 (\vec{e}_i \times \sigma_{ij} \vec{e}_j)$$

De kracht op een vlak neemt kwadratisch toe met Δx ; de arm van $1/2 \Delta x$ lengte lineair. Echter, omdat de kubus twee tegenovergestelde vlakken heeft met tegenovergestelde krachten, leveren

beide vlakken hetzelfde koppel. Het traagheidsmoment (I) van deze kubus is

$$I = \int_V r_{\perp}^2 \rho dV = \frac{1}{6} \rho \Delta x^5,$$

zodat de hoekversnelling $\vec{\alpha}$ wordt gegeven door

$$\begin{aligned}\vec{T} &= I \vec{\alpha} \\ \Delta x^3 (\vec{e}_i \times \sigma_{ij} \vec{e}_j) &= \Delta x^5 \frac{1}{6} \rho \vec{\alpha}.\end{aligned}$$

Als we de kubus oneindig klein maken, dan wordt de hoekversnelling oneindig groot als $\vec{\tau}$ niet $\vec{0}$ is. Dat betekent dus dat moet gelden dat

$$\vec{e}_i \times \sigma_{ij} \vec{e}_j = 0.$$

Als we dit uitwerken, dan vinden we

$$\sigma_{ij} - \sigma_{ji} = 0,$$

in andere woorden, de spanningstensor moet per definitie symmetrisch zijn.

2.3.5 Schuifspanning en druk

In de stromingsleer is het nuttig om een onderscheid te maken tussen oppervlaktekrachten die een vloeistofpakketje vervormen en oppervlakte die hoogstens tot lineaire compressie of expansie leiden. Lineaire compressie of expansie hangt natuurlijk direct samen met de druk (p). Echter,

de druk is geen matrixgrootheid maar een scalar-grootheid. Daarnaast staat de drukkracht loodrecht op het oppervlak en is, op een gegeven punt, naar alle richtingen gelijk. Tenslotte, de druk is positief als de kracht naar binnen is gericht, terwijl de spanningen σ_{xx} , σ_{yy} en σ_{zz} positief zijn als de kracht naar buiten is gericht. Bij een gegeven druk p is dus de drukspanning gelijk aan $-p\mathbf{I}$, waarbij $\mathbf{I}$ een eenheidstensor is.

Gegeven de bovenstaande eigenschappen van de druk, kunnen we de spanning op de volgende manier opsplitsen in druk (p) en schuifspanning gegeven door de tangentiële spanningstensor $\boldsymbol{\tau}$:

$$\boldsymbol{\sigma} = -p\mathbf{I} + \boldsymbol{\tau} \quad (2.16)$$

waarbij $\boldsymbol{\tau}$ dus drukloos moet zijn. Dit betekent dat de som τ_{ii} moet 0 zijn, in andere woorden, het spoor ('trace') van $\boldsymbol{\tau}$ is 0 (in een formule: $\text{tr}(\boldsymbol{\tau}) = 0$). Merk op dat dit niet betekent dat τ_{xx} , τ_{yy} en τ_{zz} altijd nul zijn.

Als we vergelijking (2.16) in indexnotatie schrijven, dan krijgen we

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + \tau_{ij},$$

waarin δ_{ij} de de Kronecker delta is, die gedefinieerd wordt met

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{als } i = j \\ 0, & \text{als } i \neq j. \end{cases} \quad (2.17)$$

We kunnen nu het impulsbehoud (2.14) met vergelijking (2.16) herschrijven schrijven tot

$$\rho \frac{d\vec{u}}{dt} = \nabla \cdot (-p\mathbf{I} + \boldsymbol{\tau}) + \vec{F}_{vol}.$$

Als we de term $\nabla \cdot (-p\mathbf{I})$ uitschrijven, vinden we

$$\nabla \cdot (-p\mathbf{I}) = -\frac{\partial p}{\partial x_j} \delta_{ji} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} = -\nabla p,$$

zodat we vergelijking (2.14) kunnen herschrijven tot

$$\rho \frac{d\vec{u}}{dt} = -\nabla p + \nabla \cdot \boldsymbol{\tau} + \vec{F}_{vol}. \quad (2.18)$$

2.4 Newtoniaans gedrag

Als we vergelijking (2.18) bekijken, dan zien we dat de verandering in u afhangt van de dichtheid (ρ), druk p , externe volumekrachten ($\vec{F}_{vol}$) en tangentiële spanningen. Omdat deze tangentiële spanningen het gevolg zijn van vervormingen van

de vloeistof, kunnen we deze onbekende elimineren. In het algemeen kunnen we stellen dat de wrijving een functie is van de snelheid en toestand van de vloeistof, dus

$$\boldsymbol{\tau} = f(\vec{u}, \vec{a}, t).$$

Veel vloeistoffen, zoals water en lucht gedragen zich als Newtoniaanse vloeistoffen. Voor die klasse van vloeistoffen - dus niet stromingen - kunnen we een viertal aannames op het gedrag van $\boldsymbol{\tau}$ toepassen. Als we deze aannames toepassen op de impulsvergelijking (2.18), dan vinden we daarna de Navier-Stokesvergelijking. Omdat deze aannames wat duidelijker worden bij het analyseren van vloeistoffen die zich daar niet aan houden, bespreken we kort enkele vormen van niet-Newtoniaans gedrag in hoofdstuk 5.

2.4.1 Aannames bij een Newtoniaanse vloeistof

De eerste twee aannames zijn dat de vloeistof *homogeen* is en *geen 'geheugen'* heeft. Het gevolg van deze twee eigenschappen is dat de spanning alleen een functie is van de stroomsnelheid, dus $\boldsymbol{\tau} = f(\vec{u})$. Ter verduidelijking, een vloeistof met geheugen is viscositeit afhankelijk van voorgaande vervormingen. Bijvoorbeeld, een vloeistof kan gedeeltelijk elastisch zijn, in dat geval wil het voorgaande vervormingen ongedaan maken en terug bewegen naar de vorm die de vloeistof had voor de vervorming begon. Denk hierbij aan een elastiekje. Een andere vorm van geheugen is dat voorgaande vervormingen van invloed hebben op de sterkte van het materiaal. Bijvoorbeeld, ijs wordt harder als het over één as sterk wordt gecomprimeerd. Als je een ijsblokje zou platwalsen, zal naarmate het blokje steeds dunner worden, het ijs steeds minder makkelijk vervormd kunnen worden.

De derde vloeistofeigenschap van Newtoniaanse vloeistoffen is dat de wrijvingskrachten *evenredig* zijn met snelheidsverschillen in de vloeistof. We kunnen de tangentiële spanningstensor dan schrijven als

$$\tau_{ij} = A_{ijkl} \frac{\partial u_k}{\partial x_l}, \quad (2.19)$$

waarin A_{ijkl} de 81 elementen van een 4^e-orde tensor zijn.

De vierde vloeistofeigenschap van Newtoniaanse vloeistoffen is, dat de vloeistof *isotrop* is. Dit betekent dat de vloeistof geen voorkeursrichting heeft, de spanningen door wrijving zijn niet

afhankelijk van de richting of vloeistoforiëntatie. Bijvoorbeeld, de bovengenoemde toename van de viscositeit van ijs na significante compressie is alleen aanwezig over die richting waarop de compressie plaatsvond. De viscositeit bij ‘shear’ of compressie over een andere as blijft ongewijzigd. In geval van isotropie moet - om wiskundige redenen - de tensor $\mathbf{A}$ een isotrope tensor zijn. Een isotrope tensor is een tensor die niet verandert onder een coördinaatstransformatie. In andere woorden, water - een voorbeeld van een Newtoniaanse vloeistof - gaat zich niet anders gedragen als we het een kwartslag draaien; dus de tensor die de viscositeit beschrijft, moet ook gelijk blijven. Een vierde orde isotrope tensor kan maar één vorm hebben, en in deze vorm zijn de elementen A_{ijkl} de volgende lineaire combinatie van eenheidstensors:

$$A_{ijkl} = \lambda \delta_{ij}\delta_{kl} + \mu' \delta_{il}\delta_{jk} + \mu'' \delta_{ik}\delta_{jl}, \quad (2.20)$$

waarin λ , μ' en μ'' coëfficiënten zijn die met de vloeistofeigenschappen samenhangen.

Omdat $\boldsymbol{\sigma}$ symmetrisch is, geldt dat $A_{ijkl} = A_{jikl}$. Substitutie van dit gegeven in (2.20) levert dat $\mu' = \mu'' \equiv \mu$, de dynamische viscositeit. λ wordt de tweede viscositeitscoëfficiënt genoemd. $\mathbf{A}$ wordt dan

$$A_{ijkl} = \lambda \delta_{ij}\delta_{kl} + \mu(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}).$$

De tangentiële spanningstensor (2.19) kunnen we nu schrijven als

$$\tau_{ij} = \lambda \delta_{ij} \frac{\partial u_k}{\partial x_k} + 2\mu e_{ij},$$

waarin $\mathbf{e}$, de vervormingssnelheids-tensor hebben gedefinieerd met

$$e_{ij} = \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right\}.$$

Merk op dat μ de viscositeit voor vervorming van de vloeistof is, en λ de viscositeit voor compressie en expansie van de vloeistof. Tenslotte volgt nog uit $\tau_{ii} = 0$ dat $3\lambda + 2\mu = 0$.

2.5 De Navier-Stokes vergelijkingen

Als al deze informatie wordt samengevoegd in vergelijking (2.16), wordt de uiteindelijke vergelijking voor de oppervlaktekrachten:

$$\boldsymbol{\sigma} = -p\mathbf{I} + 2\mu \left(\mathbf{e} - \frac{1}{3} \text{tr}(\mathbf{e})\mathbf{I} \right). \quad (2.21)$$

Het spoor van $\mathbf{e}$ is gelijk aan de divergentie van de vloeistof ($\nabla \cdot \vec{u}$), zodat de tweede viscositeitscoëfficiënt slechts van belang is voor samendrukbare vloeistoffen. Deze uitdrukking van de spanningstensor werd, onafhankelijk van elkaar, voor het eerst geformuleerd door Claude-Louis Navier in 1822, Siméon-Denis Poisson in 1829, Jean Claude Barré de Saint-Venant in 1843 en door George Stokes in 1845.

Ingevuld in de impulsbehoudswet (2.14) geeft vergelijking (2.21)

$$\rho \frac{d\vec{u}}{dt} = \vec{F}_{vol} - \nabla p + \nabla \cdot \left(2\mu(\mathbf{e} - \frac{1}{3} \text{tr}(\mathbf{e})\mathbf{I}) \right). \quad (2.22)$$

Deze vergelijking staat bekend als de Navier-Stokes vergelijking.

In veel gevallen kan μ constant worden genomen. Als de vloeistof daarnaast ook onsamendrukbaar is, dan reduceert (2.22) tot

$$\rho \frac{d\vec{u}}{dt} = \vec{F}_{vol} - \nabla p + \mu \Delta \vec{u}. \quad (2.23)$$

De Δ -operator, die gebruikt wordt in deze vergelijking, is gedefiniëerd als $\Delta \equiv \nabla^2$.

Een Newtoniaanse vloeistof is perfect als $\mu = 0$, en ideaal als bovendien de vloeistof onsamendrukbaar is. Een perfecte vloeistof kan geen tangentiële krachten veroorzaken op een oppervlak, want $\boldsymbol{\tau}$ is altijd 0. Aangezien vloeistoffen nooit perfect zijn - superfluiditeit nagelaten - is de aanname van een perfecte vloeistof een versimpeling van de impulsvergelijkingen met als aanname dat wrijving geen invloed heeft op de stroming. De aanname van onsamendrukbaarheid is vaker te maken, dit wordt later uitgelegd in Frame 3.2.

2.5.1 Viscositeit in het licht van statistische fysica

Hoewel de dagelijkse praktijk misschien anders doet vermoeden, is wrijving conceptueel gezien dus niets anders dan het transport van impuls. Hierbij staan de richting van de impuls en de transportrichting van de impuls loodrecht op elkaar. Aan de hand van de volgende kwalitatieve redenering kan dit - en de sturende processen - aanschouwelijk gemaakt worden:

In een 1-D stroming in de x-richting is de gemiddelde horizontale vloeistof snelheid op niveau

Frame 2.1: *Opmerkingen over de relatie tussen verschillende plaats- en vervormingstensors.*

Het is makkelijk het overzicht te verliezen in de verschillende vectoren en tensoren die de verschillende aspecten van vloeistofverplaatsing en vervorming beschrijven. In dit frame wordt de onderlinge verband tussen deze grootheden uitgelegd.

De vervorming kunnen we definiëren als de verschilvector tussen de vectoren die twee punten, O en A , die met elkaar verbinden zijn op twee opeenvolgende tijdstippen (zie Figuur F2.1). Omdat we niet geïnteresseerd zijn in de uniforme verplaatsing van O en A , houden we O op de oorsprong. De verschilvector $\vec{da}$, de relatieve verplaatsing van A ten opzichte van O , kunnen we in een cartesisch coördinatensysteem in eerste orde schrijven als

$$\vec{da} = \frac{\partial \vec{a}}{\partial x_j} dx_j,$$

of in componenten als

$$da_i = \frac{\partial a_i}{\partial x_j} dx_j.$$

Deze vergelijking veronderstelt dus dat het medium lineair vervormt als functie van $\vec{x}$. Deze uitdrukking kunnen we formeel herschrijven als

$$\frac{\partial a_i}{\partial x_j} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial a_i}{\partial x_j} + \frac{\partial a_j}{\partial x_i} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial a_i}{\partial x_j} - \frac{\partial a_j}{\partial x_i} \right).$$

De eerste term in deze relatie staat voor de *vervorming* en de tweede voor de *rotatie*. De vervormingstensor is dus gedefinieerd als

$$\frac{1}{2} \left(\frac{\partial a_i}{\partial x_j} + \frac{\partial a_j}{\partial x_i} \right).$$

Omdat de vervormingstensor in deze vorm normaliter niet gebruikt wordt, heeft deze ook geen eigen ‘letter’. De diagonaaltermen in de vervormingstensor leiden tot strekking

of opeenpersing, de overige termen tot afschuiving (‘shearing’). Nemen we van de vervormingstensor de afgeleide naar de tijd dan vinden we de vervormingssnelheidstensor $\mathbf{e}$:

$$e_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right),$$

die in sectie 2.4.1 wordt ingevoerd.

In de materiaalmechanica wordt veelal met onsamen-drukbare materialen gewerkt. De deviante vervorming $\boldsymbol{\gamma}$ - deviant dus zonder compressie of expansie - is daarbij gedefinieerd als

$$\gamma_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial a_i}{\partial x_j} + \frac{\partial a_j}{\partial x_i} \right) - \frac{1}{3} \delta_{ij} \frac{\partial a_k}{\partial x_k}$$

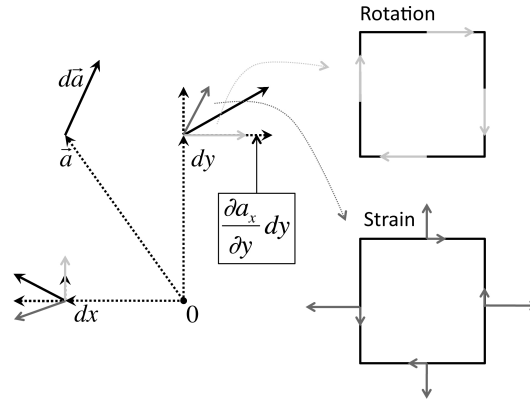
De deviante vervormingssnelheidstensor $\dot{\boldsymbol{\gamma}}$ is vervolgens de tijdsafgeleide van $\boldsymbol{\gamma}$ en verhoudt zich tot $\mathbf{e}$ via

$$\dot{\boldsymbol{\gamma}} = \mathbf{e} - \frac{1}{3} \text{tr}(\mathbf{e}) \mathbf{I}.$$

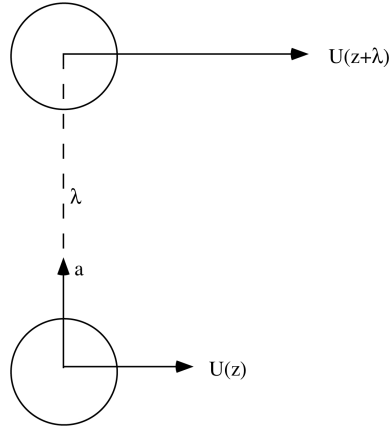
In de stromingsleer en materiaalmechanica hebben we aan de ene kant de vervormingen en aan de andere kant de spanningen. De ‘deviante’ spanningstensor, $\boldsymbol{\tau}$, is in vergelijking (2.16) gedefinieerd als

$$\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\sigma} - \frac{1}{3} \text{tr}(\boldsymbol{\sigma}) \mathbf{I}.$$

$\boldsymbol{\tau}$ bevat dus geen drukeffecten. Vloeistoffen en materialen met complexe rheologie (vervormingseigenschappen) zijn over het algemeen onsamen-drukbaar. Om die reden wordt voor deze materialen $\boldsymbol{\tau}$ gerelateerd aan $\dot{\boldsymbol{\gamma}}$ en niet aan $\mathbf{e}$.



Figuur F2.1: *Schets van de relatie tussen verplaatsing, deformatie en rotatie.*



Figuur 2.5: Voorstelling van de verticale uitwisseling van impuls in een schuifstroming τ_{13} = transport horizontale impuls per oppervlakte eenheid in de verticale richting.

z gegeven door $U(z)$. Als we kijken naar de snelheid van individuele moleculen, dan is deze opgebouwd uit de gemiddelde vloeistofssnelheid (orde grootte $\tilde{U}$) met daarop gesuperponeerd de veel grotere moleculaire snelheid (grootte a). De impulsoverdracht tussen de verschillende moleculen gaat dus met snelheid a , ($a \gg \tilde{U}$). Afhankelijk van de dichtheid, hebben de moleculen een bepaalde vrije weglengte λ , waarover ze zonder interactie impuls kunnen transporteren. De hoeveelheid impuls die over deze afstand wordt getransporteerd is lineair afhankelijk van de snelheidsgradiënt ($[U(z_0 + \lambda) - U(z_0)]$; z_0 en $(z_0 + \lambda)$ zijn het start en eindpunt van vrije weg van een molecuul) en van het aantal deeltjes dat in het spel is ($= \rho$). Het impulstransport (per eenheidsvolume) over een afstand λ is dus proportioneel met $a\rho[U(z_0 + \lambda) - U(z_0)]$.

Op deze wijze geformuleerd is de relatie nog weinig bruikbaar, daarom maken we een Taylor reeks voor $U(z)$ als functie van λ :

$$U(z_0 + \lambda) = U(z_0) + \lambda \left. \frac{\partial U(z)}{\partial z} \right|_{(z=z_0)} + \frac{1}{2} \lambda^2 \left. \frac{\partial^2 U(z)}{\partial z^2} \right|_{(z=z_0)} + \dots$$

Als we deze Taylor reeks invullen in de schatting voor het impulstransport ($a\rho[U(z_0 + \lambda) - U(z_0)]$), dan vinden we dat deze geschat wordt door

$$a\rho\lambda \frac{\partial U}{\partial z} \left[1 + \frac{1}{2} \frac{\lambda}{l} + \dots \right],$$

waarin de lengteschaal $l \equiv \frac{\partial U}{\partial z} / \frac{\partial^2 U}{\partial z^2}$ geïntroduceerd wordt. De lengteschaal l is een grootte die correspondeert met de (macroscopische)

turbulente stroming. Deze is in de troposfeer en oceaan veel groter dan de vrije weglengte ($l \gg \lambda$). De impulsoverdracht is dus bij benadering

$$\approx a\rho\lambda \frac{\partial U}{\partial z}.$$

Newtoniaanse wrijving resulteert in een bijdrage in de spanningstensor (2.21), in dit geval ($\partial U / \partial z$) in

$$\sigma_{13} \propto \mu \frac{\partial U}{\partial z}.$$

Als het moleculaire impulsoverdracht inderdaad de basis vormt voor (Newtoniaanse) wrijving, dan moeten $a\rho\lambda$ en de dynamische viscositeit μ corresponderende waarden hebben. Om dit te controleren kijken we naar de kinematische viscositeit, gedefinieerd als $\nu \equiv \mu / \rho$. Gezien de bovenstaande argumentatie zou $\nu \approx a\lambda$ moeten zijn. Dit blijkt ook redelijk te kloppen. Bijvoorbeeld, in de atmosfeer is, bij 1 atmosfeer en 20°C , de vrije weglengte $\lambda \approx 70 \text{ nm}$ en $a \approx 300 \text{ ms}^{-1}$, wat leidt tot $\nu = 2.1 \cdot 10^{-5} \text{ m}^2 \text{s}^{-1}$, wat dicht bij de werkelijke waarde van $\nu = 1.5 \cdot 10^{-5} \text{ m}^2 \text{s}^{-1}$ is.

2.6 Energiebehoud

Naast behoud van massa en impuls, voldoet een stroming ook aan behoud van energie. Energie kan zich op twee manieren manifesteren, als kinetische energie ($\frac{1}{2}\rho u^2$) en als interne energie (ρe). Interne energie is een wat ongebruikelijke grootte, maar hangt samen met de macroscopische temperatuur T via

$$e = c_v T, \quad (2.24)$$

waarin c_v de warmtecapaciteit bij constant volume is. Voor de nu komende vergelijkingen gebruiken we eerst ϵ .

Er zijn verscheidene manieren om energie aan vloeistoffen toe te voegen of te onttrekken, bijvoorbeeld electromagnetisme, absorptie van straling of chemische reacties. Daarnaast kan een stroming, dan wel een kracht op een stroming, arbeid verrichten via de volume- en oppervlaktekrachten. Tenslotte kan moleculair warmtetransport ($\vec{q}$) energie naar een vloeistofpakketje brengen. Al deze processen samen geven de vergelijking voor de totale energie. Als we vergelijking (2.11) toepassen op de totale energie, dus $\Psi = \rho(\epsilon + \frac{1}{2}u^2)$, dan leidt dit tot na het toepassen een bewerking vergelijkbaar met (2.13):

$$\rho \frac{d(\epsilon + \frac{1}{2}u^2)}{dt} = \vec{F}_{vol} \cdot \vec{u} + \nabla \cdot (\vec{u} \cdot \boldsymbol{\sigma}) - \nabla \cdot \vec{q} + S(\Psi). \quad (2.25)$$

Voor deze afleiding zijn externe bronnen van energie niet relevant, we zullen daarom in het vervolg van dit hoofdstuk de energiebronterm $S(\Psi)$ weglaten.

Om de behoudsvergelijking van interne energie te vinden, moeten we de bijdrage van de kinetische energie uit vergelijking (2.25) verwijderen. Om de balans van mechanische energie te vinden, nemen we het inproduct van de impulsbalans (2.14) met $\vec{u}$:

$$\frac{1}{2}\rho \frac{du^2}{dt} = \vec{F}_{vol} \cdot \vec{u} + \vec{u} \cdot (\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}). \quad (2.26)$$

Merk op dat met het nemen van het inproduct we weer een scalarvergelijking krijgen. Als we (2.26) van (2.25) aftrekken vinden we de thermische energiebalans:

$$\rho \frac{d\epsilon}{dt} = (\boldsymbol{\sigma} \cdot \nabla) \cdot \vec{u} - \nabla \cdot \vec{q}.$$

In deze uitdrukking substitueren we (2.21), met als resultaat:

$$\rho \frac{d\epsilon}{dt} = \epsilon - p \nabla \cdot \vec{u} - \nabla \cdot \vec{q}, \quad (2.27)$$

waarin ϵ , de dissipatie, in cartesische vorm gegeven wordt door

$$\epsilon = 2\mu \left(e_{ij} - \frac{1}{3} \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \delta_{ij} \right)^2. \quad (2.28)$$

De afleiding van ϵ is bewerkelijk, maar wel een nuttige werkcollege oefening. De eerste term in

(2.27) is de interne energie toename door de omzetting van kinetische energie in warmte. Door de kwadratische vorm van (2.28) is ϵ altijd positief. De tweede term is de interne energieverandering ten gevolge van expansie, $\nabla \cdot \vec{u} > 0$ of compressie, $\nabla \cdot \vec{u} < 0$. De derde term is de energieverandering als gevolg van gradiënten in moleculair warmtetransport.

Doordat ϵ altijd positief is, voldoet een stroming ook aan de tweede hoofdwet van de thermodynamica. Met de eerste hoofdwet van de thermodynamica $TdS = d\epsilon + pd\alpha$, waarin S de entropie en α het specifieke volume zijn, volgt uit (2.27) onder verwaarlozing van het warmtetransport door de wand, ($\nabla \cdot \vec{q} = 0$):

$$\rho T \frac{dS}{dt} = \epsilon.$$

De verandering van de entropie hangt dus samen met de dissipatie van kinetische energie. Omdat ϵ altijd positief is, neemt de entropie dus altijd toe. De tweede hoofdwet van de thermodynamica stelt dat daarom het visceuze stromingsproces onomkeerbaar is. Georganiseerde stroming kan dus wel warmte opwekken, maar interne energie kan zich niet organiseren in stroming. Merk op dat dit niet betekent dat interne energiever verschillen geen stroming kunnen opwekken!

Tenslotte is de warmteflux $\vec{q}$ geen onafhankelijk proces, maar een functie van de temperatuurgadiënt, de temperatuur en de dichtheid:

$$\vec{q} = -k \nabla T.$$

Op dit warmtetransport komen we in Hoofdstuk 6 nog terug.

Vergelijking (2.27) is met deze relatie voor $\vec{q}$ en vergelijking (2.24) te herschrijven tot

$$\rho c_v \frac{dT}{dt} = \epsilon - p \nabla \cdot \vec{u} + \nabla \cdot (k \nabla T). \quad (2.29)$$

2.7 Toestands- en constitutionele vergelijkingen

Het behoud van massa, impuls en thermische energie levert 5 vergelijkingen voor de 6 variabelen ($\vec{u}$, T , ρ en p). De complementerende vergelijking is een vergelijking die de dichtheid koppelt aan de druk en temperatuur.

Voor ideale gassen is de extra relatie de toestandsvergelijking

$$p = \rho RT. \quad (2.30)$$

In deze vergelijking is R de gasconstante ($R = R_*/M$, met M de molmassa en $R_* = 8.3 \text{ JK}^{-1}\text{mol}^{-1}$).

Voor vloeistoffen is deze relatie een constitutionele vergelijking. Hier benaderen we de constitutionele vergelijking met een lineaire verstorend van de referentiedichtheid rond een referentietemperatuur:

$$\rho = \rho_0(1 - \beta(T - T_0)), \quad (2.31)$$

waarbij ρ_0 en T_0 een referentie dichtheid en temperatuur zijn, en β een (constante) uitzettingscoëfficiënt is. Echter, niet in alle gevallen is een lineaire benadering toereikend. Bijvoorbeeld, de dichtheid van zeewater is een niet lineaire functie van de temperatuur, druk en zoutgehalte.

2.8 Samenvattend: de vergelijkingen

De relevante vergelijkingen voor de rest van dit dictaat zijn daarmee vergelijkingen (2.12), (2.22),

(2.29) en vergelijking (2.30) voor gassen en vergelijking (2.31) voor vloeistoffen. Tijdens deze cursus zullen we ons voornamelijk beperken tot stromingen waarop de zwaartekracht de enige volumekracht is ($\vec{F}_{vol} = -\rho g \vec{e}_3$), de vloeistof onsamendrukbaar is ($\nabla \cdot \vec{u} = 0$) en wrijving (ϵ) een verwaarloosbare bron van warmte is.

We krijgen dan de volgende set vergelijkingen:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \vec{u} &= 0 \\ \rho \frac{d\vec{u}}{dt} &= -\nabla p + \mu \Delta \vec{u} - \rho g \vec{e}_3 \\ \rho c_v \frac{dT}{dt} &= \nabla \cdot (k \nabla T) \\ p &= \rho R T \quad (\text{gassen}) \\ \rho &= \rho_0(1 - \beta(T - T_0)) \quad (\text{vloeistoffen}). \end{aligned} \quad (2.32)$$

Merk op dat we met de aanname van onsamendrukbaarheid niet direct aangenomen hebben dat ρ dus constant moet zijn. Dit lijkt inconsequent, maar de argumentatie voor deze keuze - en een verdere doorwerking - wordt besproken bij de zogenoemde Boussinesq benadering (Sectie 6.4).

Hoofdstuk 3

Potentiaalstromingen

3.1 Aannames

De eerste klasse van laminaire stromingen die we in dit dictaat in detail gaan bekijken zijn de potentiaalstromingen. Potentiaalstromingen dragen deze naam omdat voor deze stromingen een snelheidspotentiaal kan worden opgesteld. Wiskundig gezegd, het stromingsveld $\vec{u}$ kan beschreven worden met een snelheidspotentiaal φ ('phi') met

$$\nabla\varphi = \vec{u}. \quad (3.1)$$

Aangezien de rotatie van de divergentie van een scalar nul is, betekent dit dan een stroming alleen een potentiaalstroming kan zijn als deze rotatievrij - vorticitateitsvrij - is:

$$\begin{aligned} \nabla \times \nabla\varphi &= 0 \\ \longrightarrow \nabla \times \vec{u} &\equiv \vec{\omega} = 0 \end{aligned}$$

Zoals we verderop zullen bewijzen, heeft dit als consequentie dat de stroming wrijvingsloos moet zijn. Een wrijvingsvloeistof is een ideale vloeistof.

Een derde, maar minder strikte eis is dat de stroming divergentievrij moet zijn. Met 'minder strikt' wordt bedoeld dat formeel een potentiaalstroming niet divergentievrij hoeft te zijn. Echter, als we de stroming met een complexe potentiaal willen beschrijven, wat we uiteindelijk gaan doen, is deze voorwaarde wel dwingend. Daarnaast kan in een vloeistof zonder dichtheidsverschillen, en dus divergentievrij, veel minder makkelijk vorticititeit ontstaan. Dit analyseren we in detail in Frame 3.1.

De potentiaalstromingen die we in dit hoofdstuk gaan beschrijven voldoen dus aan drie eisen: Divergentievrij, rotatievrij en wrijvingsloos.

Geen enkele stroming voldoet aan deze voorwaarden, dus feitelijk bestaan potentiaalstromingen niet. Ten eerste zijn alle vloeistoffen visceus - op superfluïde vloeistoffen zoals zeer koude helium na. Daarnaast zal in een echte stroming de vorticititeit nooit exact nul zijn. Verder kan men in het algemeen stellen dat stromingen met een zeer hoog Reynoldsgetal turbulent zijn. Turbulentie en vorticititeit zijn twee handen op één buik, dus in turbulente stromingen is de vorticititeit zeker niet nul. Het verwaarlozen van wrijving komt overeen met aannemen dat het Reynoldsgetal van de stroming oneindig is. In Frames 3.1 en 3.2 laten we zien dat de potentiaalstroming desondanks een goede benadering is voor een specifieke groep stromingen.

3.2 Samendrukbare ideale en rotatievrije stromingen

Voordat we de onsamendrukbare ideale rotatievrije stromingen gaan bekijken, maken we eerst een uitstapje naar de vergelijkingen waarin de samendrukbaarheid nog in is meegenomen. Deze vergelijkingen zijn de voorlopers van de Navier-Stokes vergelijkingen.

3.2.1 De Euler vergelijkingen

Als we de Navier-Stokes vergelijkingen (2.22) bekijken voor ideale vloeistoffen, dan vinden we

$$\rho \frac{d\vec{u}}{dt} = -\nabla p - \rho g \vec{e}_3. \quad (3.6)$$

Frame 3.1: *Behoud van vorticeit.*

Voor veel problemen in de stromingsleer is vorticeit een absoluut kernbegrip. Behalve dat vorticeit er vaak voor zorgt dat stromingen complexe structuren krijgen, is het zelf ook minder goed intuïtief te begrijpen grootheid.

Vorticeit $\vec{\omega}$ is gedefinieerd als

$$\vec{\omega} = \nabla \times \vec{u}. \quad (3.2)$$

Vorticeit is de rotatie van de stroming, waarbij de ‘rotatie’ de wiskundige interpretatie van rotatie is. In een linksom roterende stroming is (in het xy -vlak), de kurkentrekker-regel volgend, de vorticeit positief langs de z -as. Merk op dat vorticeit ook een vectorgrootheid is, net als de stroming zelf.

Een stroming met vorticeit hoeft niet noodzakelijk-kerwijs een wervelvorm te hebben. Neem als voorbeeld een uniforme 2-D schuifstroming $u(z)$ langs een wand, in een geofysisch coördinatensysteem. Hiervoor geldt $\omega = (0, -\partial u / \partial z, 0)$, dus met een y -component ongelijk 0. Anderzijds hoeft een roterende stroming geen vorticeit te hebben. Neem bijvoorbeeld een 2-D lijnwervel gekarakteriseerd door $\vec{u} = (0, k/r, 0)$ (in cilinder-coördinaten, (r, φ, z)). Hiervoor vinden we $\omega = 0$ (behalve in de oorsprong).

De vergelijking voor de evolutie van de vorticeit kan voor een ideale vloeistof afgeleid worden. Neem vergelijking (2.32), deel deze door de dichtheid ($\nu = \mu/\rho$) en neem vervolgens de rotatie:

$$\nabla \times \frac{d\vec{u}}{dt} = \nabla \times \left(-\frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \Delta \vec{u} - g\vec{e}_3 \right).$$

De rotatie van de advectieterm kan met behulp van de relaties in sectie A.1 in een aantal stappen herschreven worden tot

$$\nabla \times ((\vec{u} \cdot \nabla) \vec{u}) = (\vec{u} \cdot \nabla) \vec{\omega} - (\vec{\omega} \cdot \nabla) \vec{u} + \vec{\omega} (\nabla \cdot \vec{u})$$

Bij het herschrijven van de materiële afgeleide maken we verder gebruik van het commuteren van de rotatie operator met de tijdsafgeleide en Δ . Verder is de laatste term $(\vec{\omega} \cdot \nabla) \vec{u}$ nul omdat we al eerder hebben aangenomen dat de stroming onsamendrukbaar is. Daarmee vinden we, na wat hergroeperen

$$\frac{d\vec{\omega}}{dt} = \frac{1}{\rho^2} (\nabla \rho) \times (\nabla p) + \nu \Delta \vec{\omega} + (\vec{\omega} \cdot \nabla) \vec{u}. \quad (3.3)$$

Vorticeit kan dus ontstaan door de interactie van dichtheidsverschillen met de druk en door wrijving. De twee laatste termen geven de lokale verandering in vorticeit door schering of compressie van de stroming.

Als we nu aannemen dat de vloeistof ideaal is ($\nu = 0$), dan vereenvoudigd de vergelijking voor de vorticeit voor onsamendrukbare ideale vloeistoffen::

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{\omega}}{dt} &= (\vec{\omega} \cdot \nabla) \vec{u} \\ \nabla \cdot \vec{u} &= 0 \\ \vec{\omega} &= \nabla \times \vec{u}. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Voor een 2-D stroming $\vec{u} = (u(x, y, t), v(x, y, t), 0)$ is het rechterlid 0 in (3.4)a (leid dit af) zodat dan geldt

$$\frac{d\vec{\omega}}{dt} = 0. \quad (3.5)$$

Vorticeit is dus een behouden grootheid voor een 2D ideale vloeistof. Een stroming zonder vorticeit wordt *rotatievrij* (‘irrotational’) genoemd.

Een belangrijke conclusie die we uit (3.5) kunnen trekken is dat als een wrijvingsloze 2-D stroming initieel rotatievrij was, deze dat altijd zal blijven. In 2-D is vorticeit dus een behouden grootheid. Dit geeft ook de bruikbaarheid van de potentiaalstromingtheorie: Als een vloeistofstroming voornamelijk 2D is, intieel rotatievrij en wrijving onbelangrijk, dan is deze analyse een bruikbare benadering.

Overigens, er is een analogie van de laatste twee vergelijkingen met de Maxwell vergelijkingen voor een stationair magnetische veld $\vec{B}$ door een stroomdichtheid $\vec{J}$:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \vec{B} &= 0 \\ \mu_0 \vec{J} &= \nabla \times \vec{B}. \end{aligned}$$

Als we hierin ook de externe forceringen weglaten (zwaartekracht, opwarming) weglaten, dan vinden we de Eulervergelijkingen:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{u}) &= 0 \\ \rho \frac{d\vec{u}}{dt} + \nabla p &= 0 \\ \frac{\partial \rho e}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho e \vec{u}) + p \nabla \cdot \vec{u} &= 0\end{aligned}\quad (3.7)$$

De Euler¹ vergelijkingen zijn de voorlopers van de Navier-Stokes vergelijkingen.

3.2.2 De vergelijking van Bernoulli

Om de vergelijking van Bernoulli af te leiden, herschrijven we de impulsvergelijking uit de Eulervergelijkingen (3.7) met behulp van de vectorrelaties in Appendix A.1. We voegen ook de zwaartekrachtsterm in potentiaalvorm weer toe, dus

$$\nabla \phi = g \vec{e}_3. \quad (3.8)$$

We vinden dan

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \vec{\omega} \times \vec{u} + \frac{1}{2} \nabla u^2 = -\frac{\nabla p}{\rho} - \nabla \phi \quad (3.9)$$

Echter, we bekijken een rotatievrije stroming ($\vec{\omega} = 0$). We vinden zo de Bernoulli² vergelijking:

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \nabla \left(\frac{1}{2} u^2 + \frac{p}{\rho} + \phi \right) = 0. \quad (3.10)$$

In het stationaire geval volgt dat

$$\frac{1}{2} u^2 + \frac{p}{\rho} + \phi \quad (3.11)$$

constant is. Op een geopotentialvlak reduceert de vergelijking verder tot

$$\frac{1}{2} u^2 + \frac{p}{\rho} = \text{constant}. \quad (3.12)$$

Is het snelheidsveld van de stroming bekend, dan kan met (3.12) het drukveld worden berekend. Op plaatsen in de stroming waar de snelheid 0 is (*stuwpunten*), is de druk het hoogst. Dit gegeven wordt gebruikt om de snelheid in de stroming te meten. Het instrument dat hiervoor is ontworpen is de zg. ‘Pitot buis’ (zoek op hoe deze werkt).

We kunnen met (3.11) uitrekenen wat de uitstroomsnelheid uit een vloeistofvat is. Langs de stroomlijn is de druk aan het vloeistofoppervlak de druk p_0 en de snelheid 0 (zie Figuur 3.1). Als in de uitstroombuiging de snelheid u_{uit} is dan geldt volgens (3.11)

$$\rho g h + p_0 = p_0 + \frac{1}{2} \rho u_{uit}^2$$

zodat $u_{uit} = \sqrt{2gh}$. (We hebben de niveaudaling verwaarloosd).

De ‘Pitot buis’ en het vloeistofvat zijn eenvoudige problemen waar de vergelijking van Bernoulli voor gebruikt kan worden. Voordat we complexere stromingen kunnen bekijken, moeten we eerst ons analytisch gereedschap uitbreiden.

3.3 Potentialen en basisstromingen

Om meer complexe problemen in 2-D te kunnen bekijken, worden drie functies gebruikt die de (potentiaal)stroming beschrijven: de stroomfunctie, de snelheidspotentiaal en de complexe potentiaal. Zoals hieronder in sectie 3.3.1 wordt aangetoond, is daarbij onsamendrukbaarheid van de vloeistof een dwingende voorwaarde.

3.3.1 De stroomfunctie

De *stroomfunctie*, ψ , is gedefinieerd als

$$\begin{aligned}\frac{\partial \psi}{\partial y} &= u \\ -\frac{\partial \psi}{\partial x} &= v,\end{aligned}\quad (3.13)$$

of in vectornotatie:

$$(\nabla \psi) \times \vec{e}_3 = \vec{u},$$

waarin $\vec{e}_3 = (0, 0, 1)$ de eenheidsvector in de z-richting is. De voorwaarde die nodig is om voor een 2-D stroming een stroomfunctie te kunnen definiëren, is dat deze divergentievrij is:

$$\nabla \cdot \vec{u} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial y \partial x} = 0.$$

Met andere woorden, divergentie kan niet uitgedrukt worden met een stroomfunctie.

¹Leonhard Euler (1707-1783)

²Daniel Bernoulli (1700-1782)

Frame 3.2: *Onsamendrukbaarheid van gassen.*

Dynamisch gezien kan een gas, zoals bijvoorbeeld de atmosfeer, vaak in zeer goede benadering als onsamendrukbaar worden beschouwd. De voorwaarden van de geldigheid van deze benadering volgen uit onderstaande ‘orde van grootte’ beschouwing.

We nemen als uitgangssituatie een vloeistof zonder wrijving, waarin de druk stationair is ($\partial p / \partial t = 0$) en waarin de zwaartekracht de enige volume kracht is ($\vec{F} = -\vec{g}$). De Navier-Stokes vergelijking (2.22) reduceert dan tot

$$\rho \frac{d\vec{u}}{dt} = -\nabla p - \rho g \vec{e}_3.$$

Het nemen van het inproduct met $\vec{u}$ en herschikking van termen geeft

$$\frac{dp}{dt} = -\rho \vec{g} \cdot \vec{u} - \frac{1}{2} \rho \frac{du^2}{dt}.$$

Verder nemen we aan dat de druk p een eenduidige functie is van ρ . Dit is correct voor bijvoorbeeld een ideaal gas met een isotherm of adiabatisch temperatuur profiel. Een adiabatisch temperatuur profiel ontstaat als een luchtpakketje verticaal door de atmosfeer wordt bewogen en dus expandeert of comprimeert, en daarbij van temperatuur verandert, maar er verder geen energie aan het luchtpakketje wordt gegeven of onttrokken. Met de definitie van de

geluidssnelheid, $c = \sqrt{dp/d\rho}$ (Frame 3.3), volgt

$$\frac{dp}{dt} = c^2 \frac{d\rho}{dt}.$$

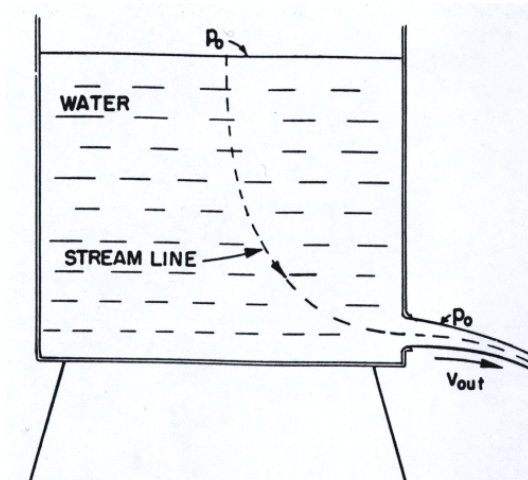
Na eliminatie van dp/dt vergelijkingen volgt

$$\frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dt} = -\frac{1}{c^2} \left(\vec{g} \cdot \vec{u} + \frac{1}{2} \frac{du^2}{dt} \right).$$

Voor een (vrijwel) onsamendrukbare stroming moet het linkerlid van deze vergelijking klein zijn. Dat betekent dat de twee termen rechts ook allebei klein moeten zijn. Nadat we de vergelijking ‘geschaald’ hebben met U en H (H is de verticale lengteschaal) leidt deze eis tot de volgende randvoorwaarden:

$$\begin{aligned} \frac{gH}{c^2} &\ll 1 \\ \frac{U^2}{c^2} &\ll 1. \end{aligned}$$

De tweede randvoorwaarde geeft de definitie van het Mach-getal M als $M = U/c$. Met een representatieve waarde voor de geluidssnelheid in de atmosfeer ($c = 340 \text{ m s}^{-1}$), zal makkelijk aan de tweede voorwaarde zijn voldaan, maar in geval van sterke verticale stroming niet altijd aan de eerste ($H \ll 10 \text{ km}$).



Figuur 3.1: *Uit een vat stromende vloeistof.*

Frame 3.3: *Afleiding van de geluidssnelheid.*

Geluidsgolven planten zich in een gas voort met de geluidssnelheid (c). Voor een ideaal gas volgt de geluidssnelheid uit de volgende beschouwing. We verwaarlozen de viscositeit en nemen aan dat geluid zich adiabatisch voortplant. De eerste hoofdwet van de thermodynamica luidt

$$0 = c_p dT - \frac{1}{\rho} dp,$$

waarin p , ρ en T de druk, dichtheid en temperatuur zijn. Met de toestandsvergelijking, $p = \rho RT$ elimineren we de temperatuur en vinden

$$p \propto \rho^\gamma$$

($\gamma = c_p/c_v$), waaruit eenvoudig kan worden afgeleid dat

$$\left. \frac{dp}{d\rho} \right|_s = \gamma \frac{p}{\rho}.$$

Het onderschrift s geeft aan dat we een adiabatisch proces beschouwen. Dit resultaat zullen we straks gebruiken.

We wekken in het gas (in rust) een kleine verstoring op (aangegeven met een accent) van de uitgangstoestand (index 0),

$$p = p_0 + p'; \quad \rho = \rho_0 + \rho'; \quad \vec{u} = \vec{u}',$$

die uiteraard moet voldoen aan de Euler- en continuïteitsvergelijking:

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \rho \vec{u} \cdot \nabla \vec{u} &= -\nabla p \\ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{u}) &= 0. \end{aligned}$$

We vullen de verstoring in, nemen aan dat de uitgangstoestand aan de vergelijkingen voldoet en behouden alleen de lineaire termen in de verstoring. Het resultaat is

$$\begin{aligned} \rho_0 \frac{\partial \vec{u}'}{\partial t} &= -\nabla p' \\ \frac{\partial \rho'}{\partial t} + \rho_0 \nabla \cdot \vec{u}' &= 0. \end{aligned}$$

Uit deze vergelijkingen elimineren we de snelheid en vinden

$$\frac{\partial^2 \rho'}{\partial t^2} - \Delta p' = 0.$$

Omdat we zojuist hebben gezien dat $p \propto \rho^\gamma$ volgt, als we hier ook de verstoring op toepassen, in eerste orde (Taylor serie)

$$p' = \gamma \frac{p_0}{\rho_0} \rho'.$$

Als we dit resultaat substitueren in bovenstaande vergelijking voor de dichtheidsverstoring dan volgt:

$$\frac{\partial^2 \rho'}{\partial t^2} - \gamma \frac{p_0}{\rho_0} \Delta \rho' = 0.$$

Aan deze vergelijking voldoet een lopende golf met frequentie ω , golflengte $\lambda = 2\pi/k$ en voortplantingssnelheid $c = \omega/k$,

$$\rho' \propto e^{\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t}.$$

Na substitutie volgt

$$c^2 = \gamma \frac{p_0}{\rho_0} = \left. \frac{dp_0}{d\rho_0} \right|_s,$$

het resultaat dat we in Frame 3.2 hebben gebruikt.

Omgekeerd, met deze definitie is automatisch voldaan aan de continuïteitsvergelijking. De stroomfunctie is constant langs een stroomlijn, dus $(\vec{u} \cdot \nabla)\psi = 0$. Realiseer je dat de snelheid altijd raakt aan de stroomlijn en dat de snelheid loodrecht op de stroomlijn altijd 0 is. Volgens deze definitie is dus de begrenzing van een vast object in de stroming tevens een stroomlijn. Deze eigenschap maakt de stroomfunctie een makkelijk te interpreteren grootheid.

De stroomfunctie is voor veel meer types stromingen een nuttige grootheid dan voor potentiaalstromingen alleen. Veel geofysische stromingen zijn divergentievrij en bij benadering 2-D. De windgedreven oppervlakte oceaancirculatie, de thermohaline oceaancirculatie (geïntegreerd over de breedte van een bassin) en de straalstroom zijn voorbeelden waarbij de stroomfunctie een belangrijke rol speelt in de mathematische analyse.

Bij een potentiaalstroming is de stroming ook rotatievrij, zodat

$$\omega_z \equiv \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = 0; \quad (3.14)$$

ψ voldoet dus aan de Laplace³ vergelijking:

$$\Delta\psi = 0. \quad (3.15)$$

Het feit dat aan de Laplace vergelijking wordt voldaan, betekent dat ψ altijd een harmonische functie⁴ is. Leggen we de randvoorwaarden van het probleem op de vergelijking, dan is met de Laplace vergelijking de stroming geheel bepaald. Verder is de Laplace vergelijking een lineaire vergelijking: als ψ_1 en ψ_2 oplossingen zijn, dan voldoet ook $\psi_1 + \psi_2$ als oplossing. Voor deze speciale klasse van stromingen (niet-visceuze, onsamendrukbare, rotatievrije stromingen), kan dus door superpositie van stroomfuncties een meer ingewikkelde stroming worden verkregen.

3.3.2 De snelheidspotentiaal

We hebben in de inleidende sectie 3.1 al de snelheidspotentiaal gedefiniëerd (Vergelijking (3.1)):

$$\nabla\varphi = \vec{u},$$

De snelheidspotentiaal is een minder inzichtelijke grootheid dan de stroomfunctie. De snelheidspotentiaal laat zich het beste vergelijken met de

potentiaal van magnetische velden. Verder geldt voor zowel φ als ψ dat de stroomsnelheid omgekeerd evenredig is met de gradiënt in beide functies.

Verder kan de Bernoulli vergelijking (3.10) ook geschreven worden als functie van φ :

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t} + \frac{1}{2}(\nabla\varphi)^2 + \frac{p}{\rho} + gz = \text{constant}, \quad (3.16)$$

waarin we voor de volumekracht de zwaartekracht hebben genomen. In dit geval is de stroming niet per definitie onsamendrukbaar.

Als de stroming ook divergentievrij is, voldoet de snelheidspotentiaal aan de Laplace vergelijking:

$$\Delta\varphi = 0. \quad (3.17)$$

Daarom kunnen bij een potentiaalstroming ook snelheidspotentialen gesommeerd worden om zo een meer ingewikkelde stroming te beschrijven.

3.3.3 De complexe potentiaal

In geval van een onsamendrukbare potentiaalstroming voldoen de twee harmonische functies φ en ψ aan de Cauchy-Riemann⁵ condities:

$$\begin{aligned} \frac{\partial\psi}{\partial y} &= \frac{\partial\varphi}{\partial x} \\ -\frac{\partial\psi}{\partial x} &= \frac{\partial\varphi}{\partial y}. \end{aligned} \quad (3.18)$$

Omdat aan deze Cauchy-Riemann condities wordt voldaan, kunnen we de twee functies combineren in één complexe functie. Als we de stroming met een complexe functie beschrijven, kunnen we aantal aspecten van 2-D potentiaalstromingen op een elegante manier beschrijven.

We definiëren een complexe potentiaal $w(z)$ als

$$w = \varphi + i\psi, \quad (3.19)$$

met $i = \sqrt{-1}$ en z een willekeurig punt in het complexe vlak ($z = x + iy$). Als de functies $\phi(x, y)$ en $\psi(x, y)$ voldoen aan de Cauchy-Riemann condities (3.18), dan is $w(z)$ een analytische functie, wat impliceert dat $w(z)$ differentieerbaar is, en dat zijn afgeleide niet afhangt van de differentiatierichting in het z -vlak. Dus, zoals in Frame 3.4 algemener wordt bewezen, is

$$\frac{dw}{dz} = u - iv. \quad (3.20)$$

³Pierre-Simon Laplace (1749-1827)

⁴Een willekeurige reële functie $u(x, y)$ met continue tweede afgeleiden, die voldoet aan de Laplace vergelijking, wordt een harmonische functie genoemd.

⁵Augustin-Louis Cauchy (1789-1857), Georg Friedrich Bernhard Riemann (1826-1866)

Frame 3.4: *Differentiëren van complexe functies*

Voor reële getallen, de definitie van ‘differentiërbaar’ voor een 2 dimensionale functie g op het punt (x_0, y_0) is dat voor differentiërbaarheid, de functie $R(x, y) = g(x, y) - g(x_0, y_0) - a(x - x_0) - b(y - y_0)$ moet voldoen aan

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} \frac{R(x,y)}{\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}} = 0.$$

In andere woorden, nabij (x_0, y_0) moet g lineair benaderbaar zijn. De partiële afgeleiden zijn dan

$$\frac{\partial g(x_0, y_0)}{\partial x} = a, \quad \frac{\partial g(x_0, y_0)}{\partial y} = b.$$

De complexe functie f is gedefiniëerd als

$$f = g + ih,$$

waarbij g en h reële functies zijn. De complexe potentiaal (3.19) is een voorbeeld van een complexe functie.

Om reële en complexe differentiatie te kunnen vergelijken, bekijken we de differentiatie van g in de complexe ruimte: g is differentiërbaar op het punt $z_0 = x_0 + iy_0$ als de reële getallen a en b bestaan zodat de functie $R_1(z) = g(z) - g(z_0) - a(x - x_0) + b(y - y_0)$ voldoet aan

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{R_1(z)}{z - z_0} = 0.$$

Gelijk aan R_1 voor g , definiëren we R_2 voor h .

De functie f heeft een afgeleide op punt z_0 enkel en alleen in het geval als er een complex getal c bestaat zodat de functie $R(z) = f(z) - f(z_0) - c(z - z_0)$ voldoet aan

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{R(z)}{z - z_0} = 0.$$

In dat geval is de afgeleide $f'(z_0) = c$.

Als we $R(z)$ uitschrijven, blijkt het toch iets minder triviaal te zijn ($a + ib = c$):

$$\begin{aligned} R(z) &= f(z) - f(z_0) - c(z - z_0) \\ &= [g(z) - g(z_0) - a(x - x_0) + b(y - y_0)] \\ &\quad + i[h(z) - h(z_0) - b(x - x_0) + a(y - y_0)] \\ &= R_1(z) + iR_2(z). \end{aligned}$$

Dus $\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{R(z)}{z - z_0} = 0$ enkel en alleen voor $\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{R_1(z)}{z - z_0} = 0$

en $\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{R_2(z)}{z - z_0} = 0$. Dat betekent dat f is alleen differentiërbaar als de eerste afgeleiden van g en h voldoen aan de relaties

$$\frac{\partial g(z_0)}{\partial x} = \frac{\partial h(z_0)}{\partial y}, \quad \frac{\partial g(z_0)}{\partial y} = -\frac{\partial h(z_0)}{\partial x}.$$

Dit zijn nu exact de Cauchy-Riemann condities (3.18). De afgeleide $f'(z_0)$ is daarmee gelijk aan

$$f'(z_0) = \frac{\partial g(z_0)}{\partial x} + i \frac{\partial h(z_0)}{\partial x} = \frac{\partial h(z_0)}{\partial y} - i \frac{\partial g(z_0)}{\partial y}.$$

We kunnen op de gebruikelijke wijze de partiële afgeleiden naar x en y op f toepassen:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial g}{\partial x} + i \frac{\partial h}{\partial x}, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial g}{\partial y} + i \frac{\partial h}{\partial y}.$$

Vervolgens definiëren we de complexe partiële afgeleiden naar z en $\bar{z} = x - iy$:

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} \right), \quad \frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right).$$

Daarmee is $\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial \bar{z}}$ en $\frac{\partial}{\partial y} = i \left(\frac{\partial}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \right)$.

Als we deze partiële afgeleiden op f toepassen, vinden we:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial z} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial g}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y} \right) + \frac{i}{2} \left(\frac{\partial h}{\partial x} - \frac{\partial h}{\partial y} \right), \\ \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial g}{\partial y} \right) + \frac{i}{2} \left(\frac{\partial h}{\partial x} + \frac{\partial h}{\partial y} \right). \end{aligned}$$

Als we hier de Cauchy-Riemann condities (3.18) voor g en h op toepassen – we willen natuurlijk dat f differentiërbaar is – dan vinden we:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial z} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial g}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y} \right) + \frac{i}{2} \left(\frac{\partial h}{\partial x} + \frac{\partial h}{\partial y} \right) = \frac{\partial f}{\partial x} = -i \frac{\partial f}{\partial y}, \\ \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial g}{\partial y} \right) + \frac{i}{2} \left(\frac{\partial h}{\partial x} - \frac{\partial h}{\partial y} \right) = 0. \end{aligned}$$

Dit is ook wat je intuïtief zou verwachten. Een functie die differentiërbaar is naar z moet intuïtief alleen afhankelijk zijn van z en niet ook nog van zijn complex geconjugeerde $\bar{z}$. De afgeleide van f , f' , is daarmee ook bekend:

$$f' = \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial z} + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = \frac{\partial f}{\partial z}.$$

Omdat differentiëerbare complexe functies alleen afhankelijk zijn van z , wordt buiten dit frame de afgeleide naar z met een gewone afgeleide geschreven en niet met een partiële afgeleide.

Met de definitie van f' en $w(z)$ (3.19) kunnen we (3.20) nu eenvoudig aantonen:

$$w' = \frac{\partial w}{\partial z} = \frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial \varphi + i\psi}{\partial x} = u - iv.$$

Verder volgt uit de Cauchy-Riemann condities

$$\nabla\varphi \cdot \nabla\psi = \frac{\partial\varphi}{\partial x} \frac{\partial\psi}{\partial x} + \frac{\partial\varphi}{\partial y} \frac{\partial\psi}{\partial y} = 0. \quad (3.21)$$

De gradient van de stroomfunctie staat dus overal loodrecht op de gradient van de snelheidspotentiaal.

De functie $w(z)$ legt de stroming geheel vast want,

$$\begin{aligned} u(x, y) &= \Re \left\{ \frac{dw}{dz} \right\} \\ v(x, y) &= -\Im \left\{ \frac{dw}{dz} \right\}. \end{aligned}$$

3.3.4 Elementaire potentiaalstromingen

We zullen nu een aantal voorbeelden van potentiaalstromingen geven met de daarbij behorende complexe potentialen. (zie Figuur 3.2). Niet iedere functie $w(z)$ zal echter een realistische potentiaalstroming opleveren.

- Parallele stroming

De complexe potentiaal van een uniforme stroming (snelheid U) onder een hoek α met de x-as is

$$w(z) = Uze^{-i\alpha}. \quad (3.22)$$

- Stroming met een stagnatiepunt (Figuur 3.2a)

Voor $k > 0$ is de complexe potentiaal

$$w(z) = \frac{k}{2} z^2 \quad (3.23)$$

gegeven. Met $z = x + iy$ vinden we $w(x, y) = \frac{k}{2}(x^2 - y^2) + ikxy$. Dus $\varphi(x, y) = \frac{k}{2}(x^2 - y^2)$ en het snelheidsveld is

$$\begin{aligned} u(x, y) &= kx \\ v(x, y) &= -ky \end{aligned}$$

wat een stroming met een stagnatiepunt voorstelt. Als de macht van z in (3.23) verandert, wordt ook de hoek tussen 'instroom' en 'uitstroom'. Voor z^2 is de hoek 90° ; voor z^3 de hoek 60° en voor z^1 is deze 180° , een parallele stroming.

- (Potentiaal)bron of -put (Figuur 3.2b)

Voor een bron ($Q > 0$) in locatie z_1 is

$$w = \frac{Q}{2\pi} \ln(z - z_1). \quad (3.24)$$

Dit stelt een radiale stroming voor, waarvan de stroomlijnen convergeren in z_1 . De divergentie langs iedere gesloten kromme die niet z_1 omvat is 0. Ligt z_1 wel binnen de kromme dan is de divergentie gelijk aan Q .

- Wervel ('vortex') (Figuur 3.2c)

Voor een wervel met sterkte Γ , (nb. met de klok mee is $\Gamma < 0$) en centrum in z_1 is

$$w = -\frac{i\Gamma}{2\pi} \ln(z - z_1). \quad (3.25)$$

Voor deze stroming is juist de circulatie die z_1 uitsluit 0 en anders Γ .

- Dipoolstroming (Figuur 3.2d)

Dit is de lineaire combinatie van een bron en een put, die op afstand $2a$ van elkaar geplaatst zijn. Voor een dipool met bron en put (sterkte respectievelijk $+\mu$ en $-\mu$) op de x-as, op $-a, 0$ en $a, 0$ is de potentiaal

$$w = \frac{\mu}{2\pi} \ln\left(\frac{z+a}{z-a}\right). \quad (3.26)$$

- Doublet

Dit is een bijzonder geval van de dipoolstroming, waar de limiet $a \rightarrow 0$ en $\mu \rightarrow \infty$ genomen wordt met de conditie dat het produkt $2\mu a$ eindig ($\equiv m$) is. Voor een doublet met sterkte m is

$$w = \frac{m}{2\pi} \frac{1}{z}. \quad (3.27)$$

In Tabel 3.1 zijn nu een aantal voorbeelden gegeven van complexe potentialen en de corresponderende (fysisch realistische) stromingen.

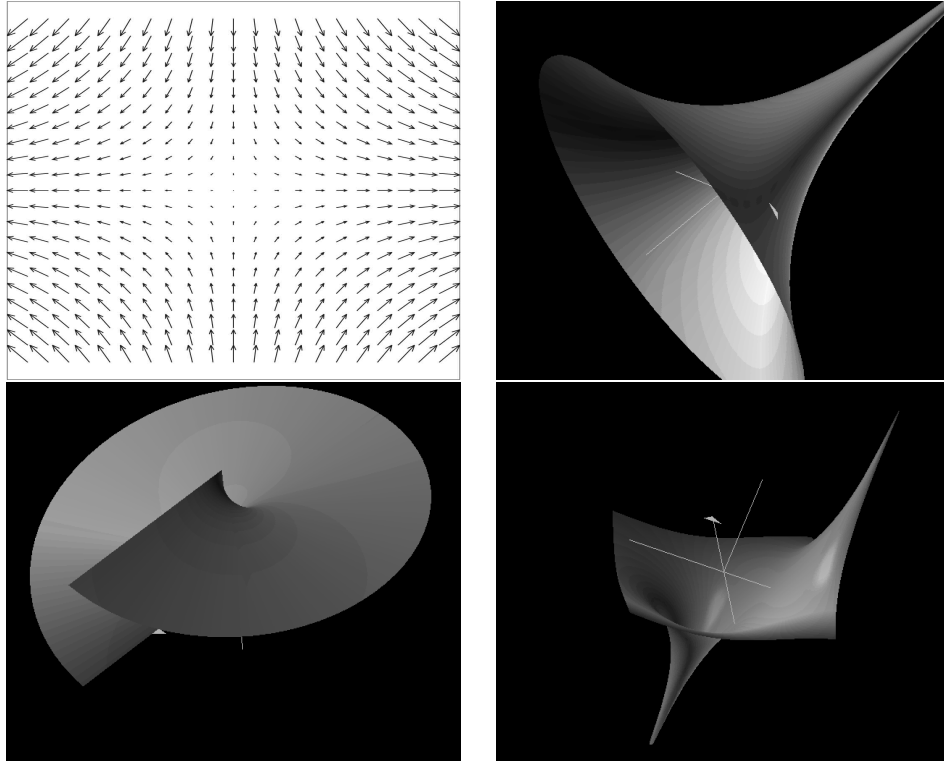
3.4 Stroming rond een cilinder

3.4.1 Stroming rond een cilinder zonder circulatie

In paragraaf 3.3.4 zijn basisfuncties gedefinieerd, deze worden nu gebruikt om een wat complexere stroming te analyseren. Met behulp van de Bernoulli vergelijking wordt onderzocht waarom 'spin' in een bal voor een richtingsverandering zorgt.

Omdat de Laplace vergelijking lineair is, mogen we potentialen superponeren. We verkrijgen daarmee een nieuwe potentiaalstroming. De complexe potentiaal

$$w(z) = Uz + \frac{m}{2\pi} \frac{1}{z}$$



Figuur 3.2: *Stromingsveld van een stagnerende stroming (linksboven) en equipotentiaalvlakken voor achtereenvolgens een put, een vortex en een dipool. Voor de equipotentiaalvlakken is z uitgedrukt als $re^{i\theta}$; r is weergegeven over de z -as en θ in de grijstint van het oppervlak.*

Tabel 3.1: *Voorbeelden van potentiaal stromingen*

Type	complexe potentiaal	complexe snelheid	stroomfunctie ψ
Parallele stroming onder een hoek α met de x -as	$U z e^{-i\alpha}$	$U e^{i\alpha}$	$U(y \cos \alpha - x \sin \alpha)$
Bron ($Q > 0$) of put ($Q < 0$) in $z = z_1$	$\frac{Q}{2\pi} \ln(z - z_1)$	$\frac{Q}{2\pi(z - z_1)}$	$\frac{Q\theta}{2\pi},$ ($z - z_1 = r e^{i\theta}$)
Wervel met centrum in z_1 , rechtsonder ($\Gamma < 0$) of linksom ($\Gamma > 0$)	$-\frac{i\Gamma}{2\pi} \ln(z - z_1)$	$\frac{i\Gamma}{2\pi(z - z_1)}$	$-\frac{\Gamma}{2\pi} \ln r,$ ($z - z_1 = r e^{i\theta}$)
Doublet in z_1 met as in positieve ($m < 0$) of negatieve ($m > 0$) richting	$\frac{m}{2\pi} \frac{1}{z - z_1}$	$-\frac{m}{2\pi} \left[\frac{1}{z - z_1} \right]^2$	$-\frac{m}{2\pi} \frac{y}{r^2}$

is de som van het veld van een parallelle stroming en een doublet. De stroomlijnen vinden we uit

$$\psi(x, y) = \Im(w) = Uy - \frac{m}{2\pi} \frac{y}{(x^2 + y^2)}. \quad (3.28)$$

Voor $x^2 + y^2 = m/(2\pi U)$ is ψ constant ($= 0$). Dit stelt in het 2-D vlak de vergelijking van een cirkel voor. Er is dus een cirkelvormige gesloten stroomlijn met straal $\sqrt{m/(2\pi U)}$. Omdat er geen vloeistof over een stroomlijn gaat ($\vec{u} \cdot \nabla \psi = 0$) kunnen we zonder de stroming te verstoren - een potentiaalstroming kent immers geen wrijving - een cilinder met deze straal in de stroming plaatsen (Figuur 3.3). De stroming rond een cilinder volgt dus uit (3.28). Op grote afstand van de cilinder wordt de invloed van het doublet steeds kleiner en de stroming convergeert naar de uniforme (achtergrond)stroming. Op de snijpunten van de x-as met de cilinder is de snelheid 0. Dit zijn de stagnatiepunten.

3.4.2 Stroming rond een cilinder met circulatie

We kunnen zonder problemen de potentiaal van een wervel aan de cilinderstroming toevoegen: het is een louter tangentiële stroming, die de gesloten stroomlijn met straal $\sqrt{m/(2\pi U)}$ niet aantast. De potentiaal is dan

$$w(z) = Uz + \frac{m}{2\pi} \frac{1}{z} - \frac{i\Gamma}{2\pi} \ln z. \quad (3.29)$$

De stroomlijnen vinden we uit

$$\psi(x, y) = \Im\{w\} = Uy - \frac{m}{2\pi} \frac{y}{(x^2 + y^2)} - \frac{\Gamma}{2\pi} \ln(x^2 + y^2)^{1/2}. \quad (3.30)$$

Op de cirkel $x^2 + y^2 = m/(2\pi U) \equiv a^2$ geldt dat $\psi(x, y)$ constant is. dus de cirkel met straal a is een gesloten stroomlijn.

In poolcoördinaten ($x = r \cos \vartheta$, $y = r \sin \vartheta$) wordt (3.30):

$$\psi(r, \vartheta) = U(r - \frac{a^2}{r}) \sin \vartheta - \frac{\Gamma}{2\pi} \ln r. \quad (3.31)$$

De snelheidscomponenten u_r en u_θ van deze stroming zijn (zie hoofdstuk A)

$$\begin{aligned} u_r &= \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \vartheta} = U(1 - \frac{a^2}{r^2}) \cos \vartheta \\ u_\theta &= -\frac{\partial \psi}{\partial r} = -U(1 + \frac{a^2}{r^2}) \sin \vartheta + \frac{\Gamma}{2\pi r} \end{aligned} \quad (3.32)$$

Voor het schetsen van het stromingsbeeld zijn de markante punten, namelijk de stuwpunten, van de stroming van belang. Daar geldt $\vec{u} = 0$. Definieren we B als maat van de circulatiesterkte met $B = -\Gamma/(2\pi aU)$, dan zien we dat voor $0 \leq B < 2$ twee stuwpunten op de cirkel liggen. Voor $B = 2$ is er precies één stuwpunt op de cirkel en voor $B > 2$ is er een stuwpunt in het buitengebied van de cirkel, zie Frame 3.5. Het complete plaatje is geschetst in Figuur 3.4.

3.4.3 Krachten op een roterende cilinder

De kracht ($\vec{F}$) die de stroming op de cilinder uitoefent, kan berekend worden als de drukverdeling op de wand bekend is. In het algemeen geldt dat

$$\vec{F} = - \int_S p \vec{n} dS, \quad (3.33)$$

waarin $\vec{n}$ de normaal is van het infinitesimale oppervlakje dS . Voor een cilinderoppervlak heeft $\vec{n}$ de componenten $(\cos \theta, \sin \theta, 0)$ zodat de kracht in de y-richting (per lengte-eenheid) op een cilinder met straal a gegeven wordt door

$$F_y = - \int_0^{2\pi} p \sin \theta a d\theta.$$

Op de stroming kunnen we de wet van Bernoulli toepassen (3.10):

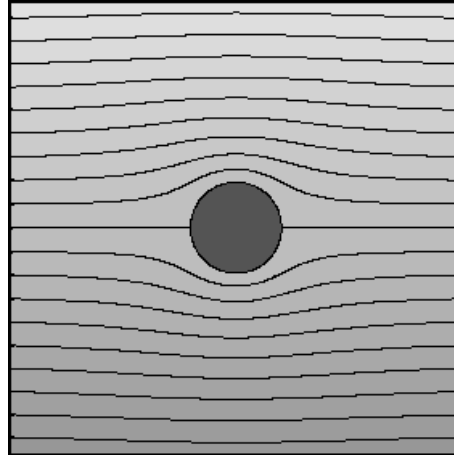
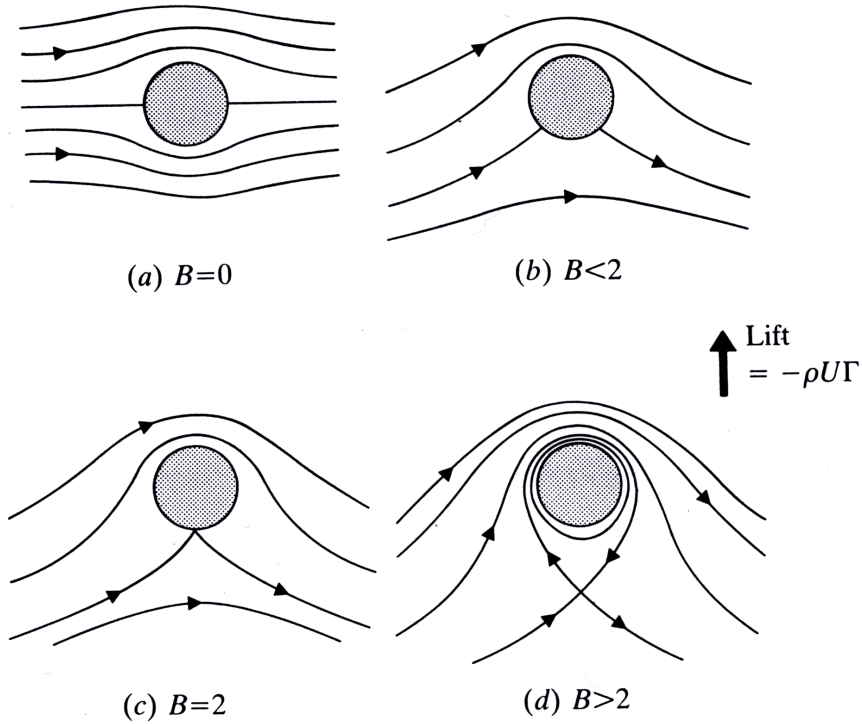
$$F_y = \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} \rho u_\theta^2 \sin \theta a d\theta.$$

(nb. $u_r = 0$ op de cilinder). Met de snelheid u_θ van (3.32) volgt

$$F_y = -\rho U \Gamma, \quad (3.34)$$

bekend als het *Kutta Joukowski theorema*⁶. De 'lift' is evenredig met de snelheid en de circulatie. De cilinder ondervindt dus een kracht loodrecht op de richting van de achtergrondstroming. Deze kracht treedt ook op bij sferische objecten, bijvoorbeeld een tennisbal die met 'slice' of 'topspin' wordt geslagen, zie Figuur 3.5. Dit staat bekend als het 'Magnus effect' - al is voor het Magnus

⁶Martin Wilhelm Kutta (1867-1944), Nikolai Egorovich Joukovsky (1847-1921)

Figuur 3.3: *Stroming rond een cilinder.*Figuur 3.4: *Stroming rond een cilinder bij verschillende circulatiesterktes (bron Acheson (1994)).***Frame 3.5:** *Relatie tussen B en de locatie van de stuwpunten.*

Uit $u_r = 0$ volgt i) $r = a$ (het stuwpunt ligt op de rand) of ii) $\cos \vartheta = 3\pi/2$. In het eerste geval volgt uit $u_\vartheta = 0$ en de definitie van B dat

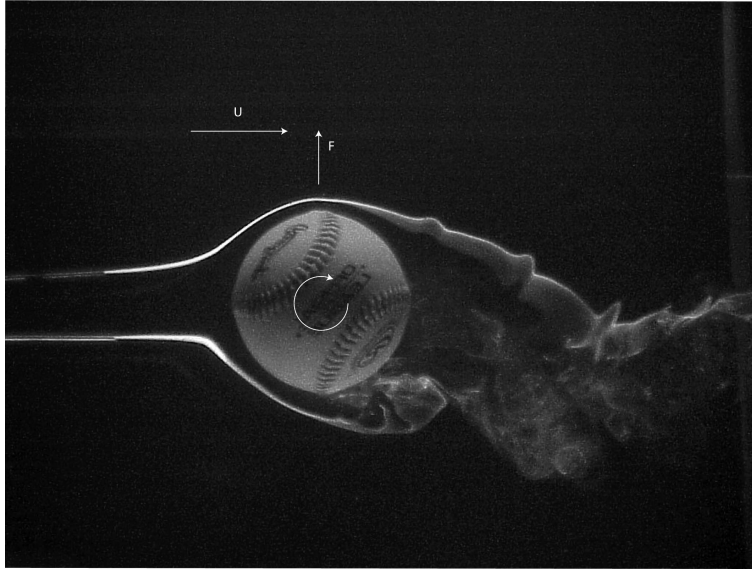
$$B + 2 \sin \vartheta = 0.$$

Deze vergelijking levert voor $0 \leq B < 2$ twee waarden voor ϑ dus twee stuwpunten op de cilinder, en voor $B = 2$ één stuwpunt.

Uit de tweede voorwaarde volgt

$$0 = 1 + \frac{a^2}{r^2} - B \frac{a}{r},$$

een vierkantsvergelijking met reële oplossingen voor $B \geq 2$ en $r \geq a$.



Figuur 3.5: Een honkbal in een uniforme windtunnelstroming. De stromingsrichting is van links naar rechts en de bal roteert rechtsom ('slice'). De kracht op de bal is in dit plaatje van onder naar boven. (bron: www.physics.umd.edu/lecdem/)

effect de opgewekte vorticeit van essentieel belang⁷.

Berekenen we de kracht in de stromingsrichting ('drag'), F_x , dan vinden we analoog

$$F_x = 0.$$

In de stromingsrichting ondervindt de cilinder geen kracht. Omdat dit zo in tegenspraak met de werkelijkheid is, wordt dit resultaat de *paradox van d'Alembert*⁸ genoemd.

3.5 Conforme afbeeldingen

De introductie van complexe variabelen heeft, behalve wat elegantere, beknopte notaties, tot nu toe niet veel meerwaarde. Bij de bestudering van draagvlakken of vleugels (*aerofoils*), blijkt het echter een zeer nuttig hulpmiddel te zijn. Complexe functies kunnen namelijk conform (hoekgetrouw) getransformeerd worden (Figuur 3.6).

In het complexe vlak, $\zeta = \xi + i\eta$, beschouwen we weer een potentiaalstroming rond een cilinder, $w(\zeta)$. We beelden dit vlak af op het complexe

vlak $z = x + iy$ door de transformatie

$$z = f(\zeta),$$

waarin f een nader te specificeren analytische functie heeft, waarvan de inverse bestaat:

$$\zeta = f^{-1}(z).$$

Deze functie beeldt ieder punt van het ζ -vlak af in het z -vlak. Als f een analytische functie is met overal een afgeleide ongelijk aan nul, dan is de afbeelding conform, dat wil zeggen, hoekbehoudend. Snelheidspotentiaallijnen en stroomlijnen in het ζ -vlak staan dus ook in het z -vlak loodrecht op elkaar.

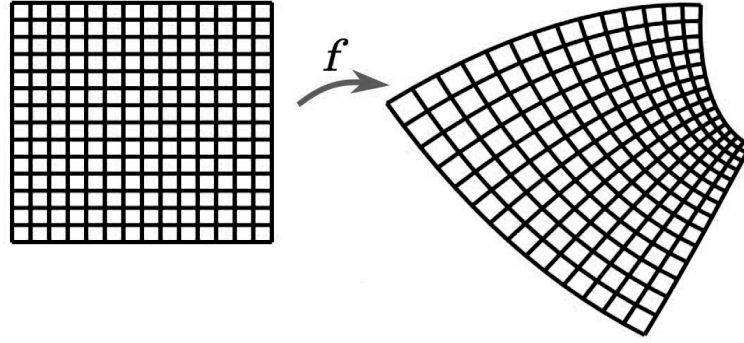
De met w corresponderende functie in het z -vlak noemen we W :

$$W(z) = W(z(\zeta)) = w(\zeta). \quad (3.35)$$

Als $w(\zeta)$ een complexe potentiaal in het ζ -vlak voorstelt dan stelt $W(z)$ de corresponderende (rotatievrije)stroming in het z -vlak voor. W is ook een analytische functie die aan de Cauchy-Riemann condities voldoet. Ook de circulatie langs willekeurige, corresponderende krommen in

⁷Het Magnus effect is daarmee een goed voorbeeld van de kracht en de zwakte van het beschouwen van stromingen als potentiaalstromingen. Aan de ene kant 'werkt' de theorie, er komt gedrag uit dat overeenkomt met de realiteit. Aan de andere kant 'klopt' het mechanisme niet en wordt niet aan de randvoorwaarden voldaan, want in de werkelijkheid is de opgewekte vorticeit door de draaiende bal de oorzaak dat de bal van baan verandert. Ook de berekende relaties en krachten worden niet gestaafd door metingen.

⁸Jean d'Alembert (1717-1783)



Figuur 3.6: Schets van de coördinatentransformatie door de conforme afbeelding met functie f .

beide vlakken is gelijk volgens eigenschap (3.35). De afbeelding van een cilinder, een stroomlijn in het ζ -vlak, is dus ook een stroomlijn in het z -vlak.

3.5.1 De Joukowski transformatie van cirkel naar vleugel

Voor stromingen rond vleugels is deze transformatie belangrijk, omdat het cilinders afbeeldt op ‘vleugelachtige’ objecten. De transformatie met dit resultaat wordt gegeven door

$$z = \zeta + \frac{c^2}{\zeta}. \quad (3.36)$$

Merk op dat voor ζ en $z \rightarrow \infty$ de stromingen identiek zijn. De inverse transformatie is

$$\zeta = \frac{1}{2}z + \sqrt{\frac{1}{4}z^2 - c^2}, \quad (3.37)$$

waar we alleen de oplossing met het $+$ teken kiezen zodat $\zeta \rightarrow z$ voor $z \rightarrow \infty$.

We gaan uitzoeken hoe deze transformatie (de doorsnede van) een cilindervormig object afbeeldt op het z -vlak. Neem in het ζ -vlak een cirkel met straal a , ($a \geq c$), $\zeta = ae^{i\theta}$. Deze transformeert volgens (3.36) tot

$$x + iy = \left(a + \frac{c^2}{a}\right) \cos \theta + i\left(a - \frac{c^2}{a}\right) \sin \theta. \quad (3.38)$$

Als we hieruit θ elimineren volgt

$$\frac{x^2}{(a + c^2/a)^2} + \frac{y^2}{(a - c^2/a)^2} = 1, \quad (3.39)$$

⁹De algemene vergelijking van een ellips is

$$\frac{x^2}{p^2} + \frac{y^2}{q^2} = 1,$$

waarin p en q de assen zijn. De brandpunten op de x -as ($p > q$) worden gegeven door $\pm(p^2 - q^2)^{\frac{1}{2}}$. In vergelijking (3.39) worden de brandpunten gegeven door $\pm c$.

de vergelijking van een ellips⁹. In Figuur 3.7 is een aantal voorbeelden gegeven van een transformatie van een cirkel naar een vleugelachtig object. Hierbij zijn het middelpunt van de cirkel (ξ_m, η_m) en de transformatieparameter gevarieerd.

We beschouwen in het ζ -vlak een stroming rond de cilinder met circulatie (zie sectie 3.4.2) in het iets algemenere geval van een parallel- en een dipoolstroming die een oriëntatie hebben van een hoek α ten opzichte van de ξ -as. De complexe potentiaal is nu (vergelijk (3.29)):

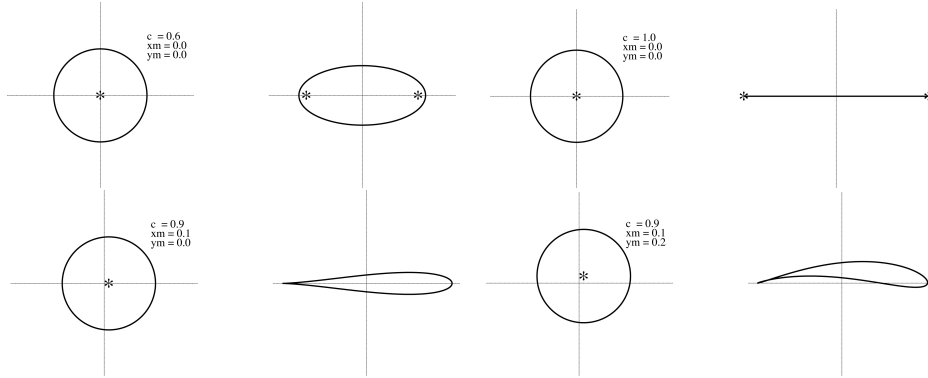
$$w(\zeta) = U\zeta e^{-i\alpha} + Ua^2 \frac{1}{\zeta} e^{i\alpha} - \frac{i\Gamma}{2\pi} \ln \zeta \quad (3.40)$$

(ga dit na). Voeren we de transformatie uit volgens (3.35) met gebruikmaking van (3.37), dan volgt

$$\begin{aligned} W(z) = U & \left[\frac{1}{2}z + \sqrt{\frac{1}{4}z^2 - c^2} \right] e^{-i\alpha} \\ & + U \frac{a^2}{c^2} e^{i\alpha} \left[\frac{1}{2}z - \sqrt{\frac{1}{4}z^2 - c^2} \right] \\ & - \frac{i\Gamma}{2\pi} \ln \left[\frac{1}{2}z + \sqrt{\frac{1}{4}z^2 - c^2} \right]. \end{aligned}$$

Het is nog een heel werk om hieruit de stroomfunctie ($= \Im\{W\}$) te berekenen. We zullen ons beperken tot het limiet geval $c = a$. In deze limiet wordt de ellips afgeplat tot de doorsnede van een vlakke plaat wordt met lengte $4a$, zie hiervoor vergelijking (3.39). De snelheidscomponenten in het z -vlak volgen uit:

$$u - iv \equiv \frac{dW}{dz} = \frac{dw}{d\zeta} \frac{d\zeta}{dz}.$$



Figuur 3.7: Vier Joukowski transformaties van een cirkel. ($a = 1$)

Uitwerken leidt tot:

$$u - iv = \frac{Ue^{-i\alpha} - U\frac{a^2}{\zeta^2}e^{i\alpha} - \frac{i\Gamma}{2\pi\zeta}}{1 - \frac{a^2}{\zeta^2}}$$

Uit deze vergelijking zien we direct dat snelheden oneindig groot worden voor $\zeta = \pm a$, wat correspondeert met $z = \pm 2a$, de uiteinden van de plaat. Dit kan dus nooit een erg realistische stroming zijn. De theoretische stroming is getekend in Figuur 3.8. De singulariteit in het stromingsveld voor $\zeta = a$, het uiteinde van de plaat, kan geëlimineerd worden door ook de teller in de vergelijking 0 te maken:

$$Ue^{-i\alpha} - Ue^{i\alpha} - \frac{i\Gamma}{2\pi a} = 0.$$

Hieraan is voldaan als

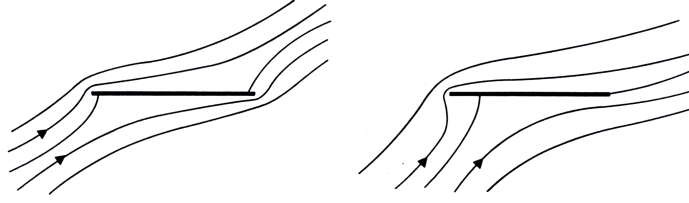
$$\Gamma = -4\pi Ua \sin \alpha, \quad (3.41)$$

de *Kutta voorwaarde*. We vinden dan voor de uitstroomrand van de plaat $u = U \cos \alpha$ en $v = 0$ (Ga dit na). Dit betekent dat de stroming bij het eind van de plaat parallel aan de plaat loopt. Aan de loefzijde van de plaat is er nog steeds een singulariteit, maar die kan ‘verwijderd’ worden door de straal en positie van het middelpunt van de cirkel in het ζ -vlak te veranderen. Als we het middelpunt van de cirkel over de ξ -as bewegen, zodanig dat de cirkel nog steeds door $\zeta = a$ gaat, ontstaan in het z -vlak symmetrische profielen met een stompe neus en een scherp uiteinde (zoals in Figuur 3.7c). Als we de straal van de cirkel groot genoeg kiezen, dan valt het singuliere punt $\zeta = -a$ binnen de cilinder (en zijn afbeelding) en

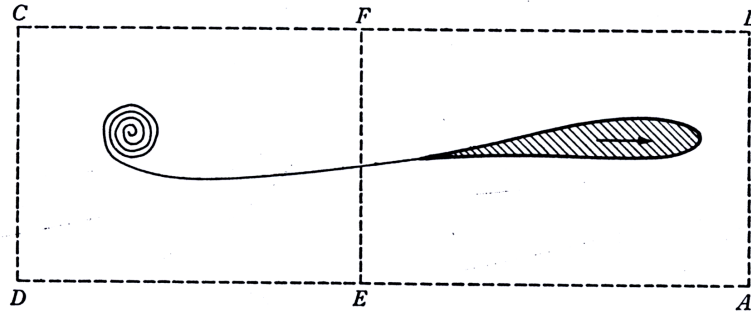
is (met de Kutta voorwaarde) de stroming overall eindig.

Als we het middelpunt van de cirkel van de x -as af kiezen dan ontstaan er asymmetrische profielen. Het voordeel van deze vorm (zoals in Figuur 3.7d) is dat de stroming een circulatie rond de vleugel heeft, maar ook een aan- en afstroming heeft die recht op de vleugel staat. Zonder deze kromming van de vleugel maakt de aanstromende lucht een kleine hoek met de neus, wat aanleiding geeft tot ongewenste turbulentie.

Het kan lijken dat er een tegenspraak is in de vleugeltheorie. Als we de vlakke plaat (of vleugel) in stilstaande lucht houden, dan is er geen circulatie rond de vleugel. Brengen we de lucht in beweging, dan is er wel circulatie om de vleugel. Tegelijkertijd kan er in 2-D geen circulatie, dus vorticeiteit ‘ontstaan’, zoals bewezen is in het theorema van Kelvin (Frame 3.6). De vraag is dus wat er in werkelijkheid zal gebeuren als we een vlakke plaat onder een kleine hoek in een stroming houden. In eerste instantie zal de stroming om het uiteinde sterk versneld en gekromd worden. De viscositeit zal deze grote snelheidsgradiënten niet toestaan en zal vorticeiteit opwekken: er zal zich een werveltje vormen aan het uiteinde dat vervolgens met de stroom wordt meegevoerd (Figuur 3.9). Nu kan het circulatietheorema van Kelvin juist uitkomst bieden: een willekeurige lijnintegraal in de rotatievrije stroming, die de vleugel en de wervel omsluit, zal gelijk aan 0 zijn en blijven. Dat betekent dat de afgevoerde vorticeiteit precies moet corresponderen met de circulatie rond de vleugel. Deze circulatie maakt dat het stagnatiepunt naar het uiteinde verschuift en brengt de stroming in lijn met de vleugel. Er ontstaat dan



Figuur 3.8: *Stroming rond een vlakke plaat. (a) circulatie 0; (b) met circulatie $(\Gamma) -4\pi Ua \sin \alpha$ (bron Acheson (1994)).*



Figuur 3.9: *Omdat de totale circulatie in een rotatievrije stroming nul is, bijvoorbeeld langs rand ABCD, wordt de circulatie rond een vleugel (ABFE) gecompenseerd door de circulatie van de afgesnoerde vortex (EFCD) (bron Batchelor (1970)).*

Frame 3.6: Het circulatietheorema van Kelvin.

Om het circulatietheorema van Kelvin af te leiden beschouwen we een gesloten *materiële kromme* in de vloeistof. Een materiële kromme is een denkbeeldige curve gevormd door ‘gemerkte’ vloeistofelementjes. Zo’n kromme is niet stationair want ieder elementje van de kromme beweegt met vloeistofsnelheid ter plekke van dat elementje. De circulatie langs zo’n kromme kunnen we formuleren als

$$\Gamma = \oint_{C(t)} \vec{u} \cdot d\vec{l},$$

en de tijdsafgeleide als

$$\frac{d\Gamma}{dt} = \oint_{C(t)} \frac{d\vec{u}}{dt} \cdot d\vec{l} + \oint_{C(t)} \vec{u} \cdot d\frac{d\vec{l}}{dt}. \quad (3.42)$$

Er komen twee termen omdat de lijnintegraal ook met de tijd verandert. Voor de tweede integraal geldt

$$\oint_{C(t)} \vec{u} \cdot d\frac{d\vec{l}}{dt} = \oint_{C(t)} \vec{u} \cdot d\vec{u} = \oint_{C(t)} \frac{1}{2} \cdot d(\vec{u})^2 = 0. \quad (3.43)$$

De reden dat deze integraal nul is, is losjes gezegd omdat de lijnintegraal met de stroom mee beweegt. Daarom kan er ook nooit door de integraal vloeistof naar binnen of buiten stromen.

De eerste integraal van (3.42) herschrijven we met de Eulervergelijking ((3.6) en (3.8)) tot

$$\frac{d\Gamma}{dt} = - \oint_{C(t)} \frac{\nabla p}{\rho} + \nabla \phi \cdot d\vec{l}.$$

Voor constante dichtheid volgt

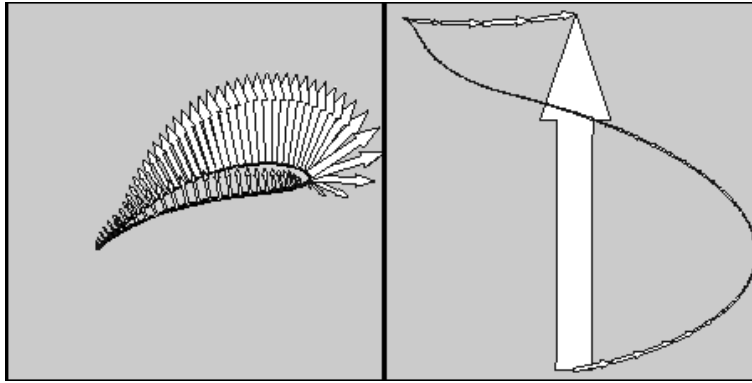
$$\frac{d\Gamma}{dt} = 0,$$

het circulatietheorema van Kelvin. Een meer rigoureuze afleiding van dit theorema wordt bijvoorbeeld gegeven in Batchelor (1970), hoofdstuk 3.

Een belangrijke consequentie is, dat een stroming die initieel rotatievrij is, dat ook zal blijven. Is de dichtheid niet constant, dan volgt uit (3.9) en de stelling van Stokes

$$\frac{d\Gamma}{dt} = - \int_S \left(\nabla \frac{1}{\rho} \times \nabla p \right) \cdot \vec{n} \, dS, \quad (3.44)$$

het theorema van Bjerkness. Dus als druk- en temperatuurvlakken evenwijdig zijn, dan is $d\Gamma/dt$ gelijk aan 0. In dat geval spreken we van een *barotrope stroming*. Als ze niet evenwijdig zijn dan verandert de circulatie en dus ook de vorticeit. In dat geval spreken we van een *baroclinische stroming*. Barocliniciteit ligt aan de basis van veel geofysische stromingen.



Figuur 3.10: *Krachtverdeling rond de omtrek van een vleugel. Rechts is de resulterende draagkracht geïntegreerd.*

een stationaire situatie, waarin de circulatie bepaald wordt door de Kutta voorwaarde. De bijbehorende opwaartse kracht wordt gegeven door de Kutta-Joukowski relatie (vergelijking (3.34)).

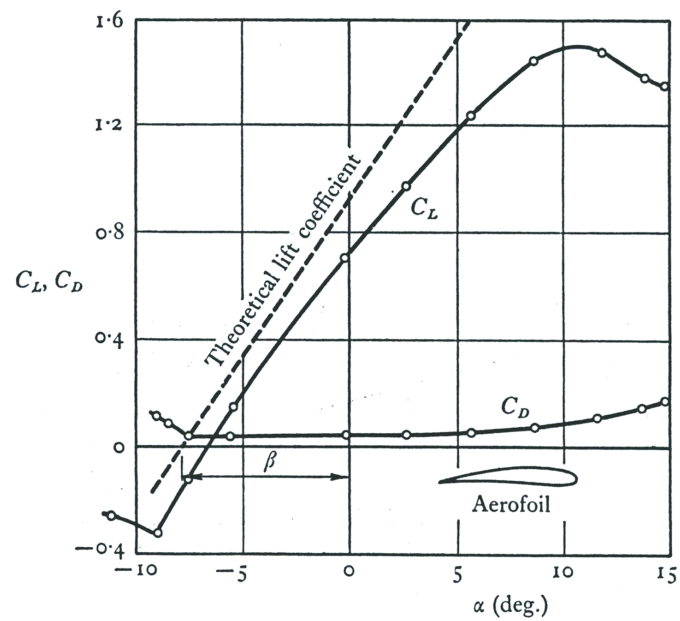
De Kutta voorwaarde (3.41) kan zodanig herschreven worden dat deze voorwaarde ook geldig is voor gekromde vleugelvormen. Dit geeft een theoretische schatting van de lift opgewekt door een vleugel onder een bepaalde invalshoek. De theoretische lift kan ook berekend worden door de potentiaalstroming en daarna het drukveld rond de vleugel te bepalen (vergelijking (3.33)). Dit kan dan misschien niet meer analytisch, maar numeriek is dit nog steeds eenvoudig. Figuur 3.10 geeft een voorbeeld van de krachten op een vleugel, en de integraal van deze kracht.

In Figuur 3.11 kunnen we zien dat de theorie voor rotatievrije stromingen voor kleine invalshoeken uitstekend overeen komt met de werkelijkheid¹⁰. Zolang de invalshoek klein is, is er enkel een kleine systematische overschatting van de lift. Dit komt door verschillen tussen de grenslaagdikte aan de boven- en onderzijde van de vleugel. Hoe die grenslaag ontstaat en wat basisprincipes wordt in het volgende hoofdstuk besproken. Bij

grote invalshoeken neemt de waargenomen lift af, in tegenstelling tot de theorie. De reden is dat de baan van de lucht over de vleugel zo gekromd wordt, dat de stroming rond de vleugel instabiel wordt. Er ontstaat dan een turbulente wervel aan de bovenkant van de vleugel - vergelijkbaar met de wervel die rechtsonder de honkbal ontstaat (Figuur 3.5) - waardoor de dynamische druk aan de bovenkant toeneemt en de lift wegvalt. Om een vleugel draagkracht te geven moet de stroming dus laminair blijven.

De potentiaalstromingen die in dit hoofdstuk beschreven staan, zijn 2-D. De werkelijkheid is 3-D, wat voor de besproken fysica van vleugellift overeenkomt met een oneindig lange vleugel. Bij een eindige en echte vleugel zullen er aan het einde van de vleugel 3-D processen optreden. Zoals in Figuur 3.12 te zien is, wordt er bij de vleugeltip een wervel opgewekt. Door die wervel wijkt de werkelijke stroming rond een vliegtuig behoorlijk af van de theoretische stroming rond een 2-D vleugel. Toch blijkt de 2-D theorie de lift van een vleugel goed te voorspellen. Dit geeft aan dat deze theorie het relevante aspect oppikt, en dat is de directe stroming rond de vleugel.

¹⁰De draagkracht van een cilinder (of zijn afbeelding) is uiteraard gebaseerd op het 'simpele principe' van de tweede wet van Newton en kan dan ook eenvoudig geschat worden uit de impulsverandering per seconde. Als de circulatie om een cilinder (straal a) de stroming (stroomsnelheid U) onder een (kleine) hoek α doet afbuigen, dan is de opwaartse kracht (F_y gelijk aan impulsverandering per seconde $\propto \rho U^2 a \alpha$). Dit resultaat is op een constante na gelijk aan de theoretische waarde voor een rotatievrije stroming



Figuur 3.11: Waargenomen en theoretische draagkracht en wrijving van een vleugel als functie van de invalshoek. (In het theoretische geval is de wrijving nul. (Batchelor (1970))



Figuur 3.12: Vortex aan het uiteinde van een vliegtuigvleugel. (bron: NASA Langley Research Center)

Hoofdstuk 4

Eenvoudige visceuze stromingen

4.1 Aannames

In hoofdstuk 2 zijn de algemene vergelijkingen opgesteld voor hydrodynamische stromingen. Door het niet-lineaire karakter van deze vergelijkingen zijn deze vergelijkingen slechts bij uitzondering analytisch oplosbaar. Potentiaalstromingen, besproken in hoofdstuk 3, zijn de limietgevallen voor stromingen waarin wrijving onbelangrijk is, vorticeiteit afwezig en de dichtheid constant is. Als verder wordt aangenomen dat de stroming stationair is, kunnen er dan analytische oplossingen worden geconstrueerd voor realistische problemen.

In dit hoofdstuk gaan we kijken naar analytische oplossingen voor realistische problemen waar wrijving wel van belang is, maar er geen koppeling is tussen thermodynamica en dynamica. We veronderstellen dus dat ρ constant is en de thermodynamische vergelijking (2.29) niet van belang is. Verder is de wrijving Newtoniaans. Tenslotte nemen we aan dat de zwaartekracht de enige volumekracht is.

De bewegingsvergelijkingen (2.32) reduceren met deze benaderingen tot:

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \vec{u} &= 0 \\ \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \nabla) \vec{u} &= -\frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \Delta \vec{u} - \vec{g}. \quad (4.1)\end{aligned}$$

Hierin is $\nu = \mu/\rho$ de kinematische viscositeit.

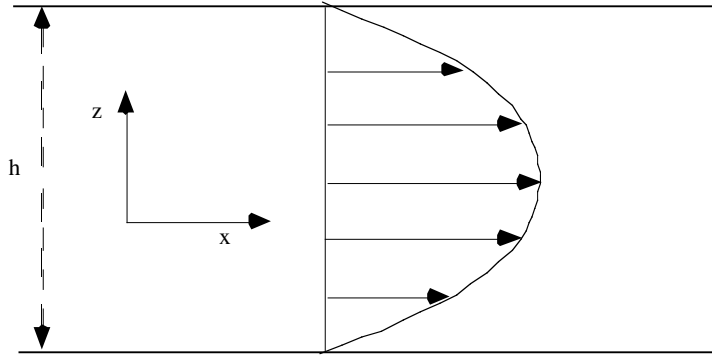
Nog steeds vertonen deze vergelijkingen niet-lineair gedrag, afhankelijk van het Reynoldsgetal van het stromingsprobleem. Voor problemen met niet-lineaire gedrag kunnen de vergelijkingen alleen numeriek opgelost worden. Zolang het Reynoldsgetal van de stroming laag ($< 10^5$) is, blijft de stroming laminair en zijn analytische oplossin-

gen ook zinvol in het geval dat deze gevonden zouden kunnen worden.

Zoals we zullen zien, wordt de complexiteit van de stroming nu bepaald door de complexiteit van de geometrie van de ruimte waarin de stroming plaats vindt. Is deze geometrie eenvoudig, bijvoorbeeld tussen twee vlakke en oneindig lange platen, dan is ook de stroming eenvoudig. Parallele stromingen zijn niet alleen de wiskundig makkelijkste analytische oplossingen van de gereduceerde Navier-Stokes vergelijkingen, ze zijn ook behoorlijk realistisch. Omdat de vloeistofdeeltjes in deze stromingen rechte banen volgen met een constante snelheid, is er geen drukkracht nodig voor versnelling of afbuiging van vloeistofdeeltjes. Het ontbreken van deze grootschalige stromingsverstoringen maakt dat de stroming minder makkelijk turbulent wordt. Dit betekent dat analytische oplossingen voor eenvoudige geometriën vaker realistisch zijn dan analytische oplossingen voor complexe geometriën, omdat de stroming in het laatste geval veel makkelijker turbulent wordt.

4.2 Parallele stromingen

Parallele stromingen is een verzameling analytische oplossingen van visceuze stromingen. Parallele stromingen zijn, per definitie, evenwijdig en daarnaast nemen we aan dat de stroming tijdsconstant is ($\partial \vec{u} / \partial t = 0$). Voor een stationaire en evenwijdige stroming zijn twee van de drie snelheidscomponenten nul en hangt de derde maar van één coördinaat af. In dat geval reduceert de impulsvergelijking (4.1) enorm. Afhankelijk van hoe de randvoorwaarden gesteld worden, op de snelheid (u) of op de spanning (τ), is de resul-



Figuur 4.1: *Vlakke Poiseuille stroming*

rende stroming een vlakke Poiseuille stroming of een zogenaamde ‘falling film’.

4.2.1 Vlakke Poiseuille stroming

We beschouwen een stationaire stroming ten gevolge van een constante horizontale drukgradiënt tussen twee horizontale platen zoals geschetst in Figuur 4.1. In deze situatie is $\vec{u}$ alleen in de x -richting en een functie van z , dus $\vec{u} = (u(z), 0, 0)$. Omdat er geen krachten en ook geen stromingen in de y richting zijn, is $p = p(x, z)$. De impulsvergelijkingen (4.1) in x en z worden dan:

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial p}{\partial x} + \mu \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \\ 0 &= \frac{\partial p}{\partial z} - g. \end{aligned}$$

Omdat u geen functie van x is, moet $\partial^2 p / \partial x^2$ nul zijn, dus $\partial p / \partial x$ constant met waarde α .

Vanwege de wrijving moet de stroming bij de platen naar nul gaan. Dit geeft de randvoorwaarden dat $u(0) = u(H) = 0$. Met deze randvoorwaarden kan de analytische oplossing worden bepaald, deze is:

$$u(z) = \frac{\alpha}{2\mu}(z^2 - zH).$$

4.2.2 ‘Falling film’

Een vloeistof-film (Figuur 4.2) beweegt verticaal langs een plaat onder invloed van de zwaartekracht en een schuifspanning τ . Deze schuifspanning kan bijvoorbeeld veroorzaakt worden door langsstromende lucht. In dit geval bestaat een oplossing van de bewegingsvergelijkingen met $\vec{u} =$

$(0, 0, w(x))$. Vergelijking (4.1) reduceert dan tot:

$$\begin{aligned} 0 &= -\frac{\partial p}{\partial x} \\ 0 &= -\frac{\partial p}{\partial z} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \rho g \end{aligned}$$

met randvoorwaarden

$$\begin{aligned} w(0) &= 0 \\ \mu \frac{\partial w}{\partial x}(L) &= \tau. \end{aligned}$$

Omdat $\partial w / \partial z = 0$, moet $\partial p / \partial z$ constant zijn, net als voor vlakke Poiseuille stromingen. Als we α en β definiëren als $\partial p / \partial z = \alpha$ en $\beta = (\alpha + \rho g) / \mu$, dan is de oplossing

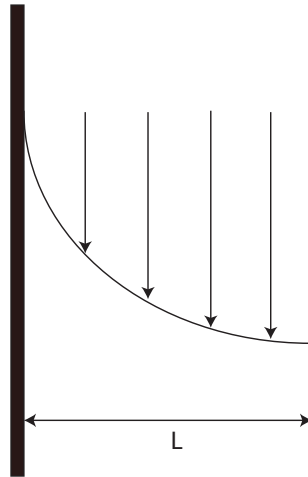
$$w(x) = \beta \left(\frac{x^2}{2} - Lx \right) + \frac{\tau x}{\mu}.$$

Dit geeft een familie van oplossingen geparametriseerd door α en τ .

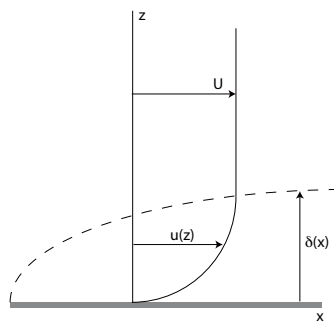
4.3 Grenslaagstromingen

Grenslaagstromingen hebben ook relatief eenvoudige analytische oplossingen voor vergelijking (4.1). Echter, daar gaan een paar aannames over de vorm van de stroming en welke termen daarbij belangrijk zijn, aan vooraf. Dit is daarmee ook het eerste voorbeeld van het nut van schaalanalyse om tot een goede oplossing te komen.

In visceuze stromingen is de vector van de vloeistofsnelheid op het oppervlak gelijk aan 0. Dit is een belangrijk verschil met potentiaalstromingen. Visceuze krachten zorgen ervoor dat ook de tangentiële snelheidscomponent aan het oppervlak naar nul gaat. De laag waarin die krachten



Figuur 4.2: *Geometrie van een dunne vloeistoffilm die verticaal langs een vlakke wand beweegt onder invloed van de zwaartekracht.*



Figuur 4.3: *De ontwikkeling van een grenslaag langs een vlakke plaat.*

een belangrijke rol spelen wordt de *grenslaag* genoemd. Wiskundig gezien is dit een delicaat probleem, want de introductie van wrijving leidt tot een extra term, de enige van de tweede orde, in de Navier-Stokes vergelijkingen.

De sterke gradiënt in de buurt van het oppervlak correspondeert ook met een grote vorticeiteit. Bij de achterrand van een vleugel ontstaan initieel wervels die niet door de potentiaaltheorie voorspeld worden en die maken dat aan de Kutta voorwaarde wordt voldaan (zie hoofdstuk 3).

Voor een nadere beschouwing nemen we een stationaire parallelle stroming langs een vlakke plaat (zie Figuur 4.3). Aan het begin van deze plaat zal door visceuze effecten vorticeiteit gegenereerd worden die zich geleidelijk aan omhoog zal verplaatsen door diffusieve processen: er zal zich een grenslaag vormen, waarvan de dikte (δ), gerekend vanaf het begin van de plaat, geleidelijk zal toenemen. In een uniform stromingsveld (U) met een coördinatenstelsel waarvan de x -as langs de plaat valt, zal op dimensionele gronden de dikte van de grenslaag toenemen als:

$$\delta = \sqrt{\nu x/U},$$

zodat

$$\frac{\delta}{x} = \sqrt{\frac{\nu}{Ux}} \equiv 1/\sqrt{Re_x}. \quad (4.2)$$

Omdat $Re_x \gg 1$ zal de grenslaagdikte δ klein zijn ten opzichte van de (horizontale) lengteschaal L . Bijvoorbeeld, de grenslaag rond een vleugel is veel dunner dan de breedte van de vleugel. Het feit dat grenslagen ‘dun’ zijn, leidt tot aanzienlijke vereenvoudigingen bij het oplossen van stromingsproblemen. We illustreren dit aan de hand van een 2-D, onsamendrukbare stroming langs een vlakke plaat (Figuur 4.3). De lengteschaal in de x -richting is L . De continuïteitsvergelijking is:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0.$$

De eerste term is $\mathcal{O}(U/L)$ en de tweede $\mathcal{O}(w/\delta)$, zodat $w \propto U\delta/L$ en daarmee een ‘maat’ voor de snelheid in de z -richting gegeven is. De bewegingsvergelijking in de x -richting is uitgeschreven:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + w \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right).$$

Als we een schaalanalyse van deze vergelijking maken, dan vinden we met gebruikmaking van het resultaat (4.2) dat de laatste term $\mathcal{O}(Re^{-1})$

kleiner is dan de overige termen (ga dit na). Het stelsel vergelijkingen wordt dan

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} &= 0 \\ \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + w \frac{\partial u}{\partial z} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \\ \frac{\partial p}{\partial z} &= 0, \end{aligned}$$

de grenslaagvergelijkingen. De laatste vergelijking geeft aan dat in eerste benadering de druk niet met de hoogte verandert en dat dus de horizontale drukgradiënt $\partial p/\partial x$ in de grenslaag gelijk moet zijn aan die daarbuiten. Deze kiezen we voor de eenvoud gelijk aan 0.

De randvoorwaarden zijn $u, w = 0$ voor $z = 0$, en voor $z \rightarrow \infty$ convergeert de stroming naar de achtergrondstroming, die we met de theorie uit de vorige hoofdstukken kunnen behandelen als een wrijvingsloze potentiaalstroming. Gezien de geringe dimensie van de grenslaag verwaarlozen we de invloed die deze daarop heeft.

De grenslaagvergelijkingen reduceren dan in het stationaire geval tot

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} &= 0 \\ u \frac{\partial u}{\partial x} + w \frac{\partial u}{\partial z} &= \nu \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}. \end{aligned} \quad (4.3)$$

De makkelijkste manier om voor deze twee vergelijkingen een oplossing te vinden, is door een stroomfunctie als variabele in te voeren. We definiëren eerste de dimensieloze (gelijkvormigheids)variabele η als:

$$\eta = \frac{z}{\delta(x)},$$

met $\delta = \sqrt{\nu x/U}$. We voeren nu de dimensieloze stroomfunctie $f(\eta)$ in:

$$\psi = (\nu U x)^{\frac{1}{2}} f(\eta).$$

Na herschrijven van vergelijking (4.3), vinden we dat de functie f moet voldoen aan

$$\frac{d^3 f}{d\eta^3} + \frac{1}{2} f \frac{d^2 f}{d\eta^2} = 0 \quad (4.4)$$

(leid dit af). Met deze substitutie reduceert de grenslaag vergelijking tot een ‘gewone’ differentiaal vergelijking, dit is ook de reden waarom de stroomfunctie als variabele is geïntroduceerd.

Overigens kan (4.4) slechts numeriek worden opgelost. Zo volgt voor de oppervlaktespanning $\tau \equiv (\mu du/dz)_{z=0}$

$$\tau = 0.33\rho U^2 \sqrt{\frac{\nu}{Ux}},$$

waar de coëfficiënt uit de numerieke resultaten volgt. Als we tenslotte de dikte van de grenslaag definiëren als de waarde van z waarvoor $u(z)/U = 0.99$ dan volgt uit de numerieke resultaten

$$\delta/x = 5\sqrt{\frac{\nu}{Ux}}.$$

4.4 Stokes stromingen

Het karakter van visceuze stromingen hangt sterk af van de relatieve grootte van de termen $(\vec{u} \cdot \nabla)\vec{u}$ en $\nu\Delta\vec{u}$ in vergelijking (4.1). In parallele stromingen is de term $(\vec{u} \cdot \nabla)\vec{u}$ niet van invloed vanwege de geometrie van de stroming. Er zijn echter ook twee andere (belangrijke) situaties waarbij $(\vec{u} \cdot \nabla)\vec{u}$ veel kleiner is dan $\nu\Delta\vec{u}$. De eerste situatie geldt voor stromingen waarbij het Reynolds getal $Re = UL/\nu$ klein is. De oorzaak kan zijn dat de snelheden laag zijn en/of dat de viscositeit hoog is. Dit zijn Stokes stromingen. De tweede situatie geldt voor stromingen in een dunne film, waarbij L klein is. In beide gevallen is $(\vec{u} \cdot \nabla)\vec{u}$ te verwaarlozen in verhouding met visceuze termen, en reduceren de bewegingsvergelijken tot:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \vec{u} &= 0 \\ 0 &= -\frac{1}{\rho}\nabla p + \nu\Delta\vec{u}. \end{aligned} \quad (4.5)$$

In deze vergelijkingen zijn dus de drukgradiënt en wrijving in balans. Omdat deze vergelijkingen lineair zijn is er veel bekend over de oplossing van dit type stromingen. We zullen ons beperken tot een voorbeeld van een Stokes stroming in deze paragraaf en een voorbeeld van een grenslaagstroming in de volgende paragraaf.

4.4.1 Stokes stroming om een bol

Veronderstel dat een bolletje (dichtheid ρ_f en straal a) zich in een verticale kolom vloeistof (dichtheid ρ) met constante snelheid naar beneden beweegt onder invloed van zijn eigen gewicht, zie Figuur 4.4. We willen de sedimentatiesnelheid bepalen als functie van de andere parameters van

het systeem. We gaan als eerste stap het stromingsveld uitrekenen en daarna de kracht bepalen die een stromende vloeistof op het bolletje uitoefent. Zet het bolletje in een stroming parallel met de z -as met snelheid U (de sedimentatiesnelheid). We zetten het bolletje dus stil in het assenstelsel, omdat dan veel makkelijker oplossingen te vinden zijn voor het wiskundige probleem dan wanneer we het bolletje door het assenstelsel laten bewegen. Het Reynoldsgetal gebaseerd op de straal van de bol is dan Ua/ν . Met typische waarden: $a = 10^{-4}$ m, $U = 10^{-3}$ m s $^{-1}$ en $\nu = 10^{-6}$ m 2 s $^{-1}$ (water), is $Re = 10^{-1}$.

Omdat het bolletje sferisch symmetrisch is, de achtergrondstroming uniform en de vergelijkingen lineair, kunnen we zonder problemen aannemen dat de resulterende stroming ook sferisch symmetrisch is. We gaan de vergelijkingen (4.5) in bolcoördinaten uitschrijven. De snelheidsvector $\vec{u}$ heeft in dit stelsel de componenten $\vec{u} = \{u_r(r, \vartheta), u_\vartheta(r, \vartheta), u_\varphi = 0\}$, waarbij de snelheidsvector is gedefiniëerd als $u_r = \frac{dr}{dt}$ en $u_\vartheta = r \frac{d\vartheta}{dt}$:

$$0 = \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{2}{r}u_r + \frac{1}{r}\frac{\partial u_\vartheta}{\partial \vartheta} + \frac{1}{r}u_\vartheta \cot \vartheta \quad (4.6)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial r} &= \mu \left(\frac{\partial^2 u_r}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial u_r}{\partial r} - \frac{2}{r^2}u_r + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u_r}{\partial \vartheta^2} \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{r^2}\frac{\partial u_r}{\partial \vartheta} \cot \vartheta - \frac{2}{r^2}\frac{\partial u_\vartheta}{\partial \vartheta} - \frac{2}{r^2}u_\vartheta \cot \vartheta \right) \quad (4.7) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{r}\frac{\partial p}{\partial \vartheta} &= \mu \left(\frac{\partial^2 u_\vartheta}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial u_\vartheta}{\partial r} - \frac{1}{(r \sin \vartheta)^2}u_\vartheta \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u_\vartheta}{\partial \vartheta^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial u_\vartheta}{\partial \vartheta} \cot \vartheta + \frac{2}{r^2}\frac{\partial u_r}{\partial \vartheta} \right). \quad (4.8) \end{aligned}$$

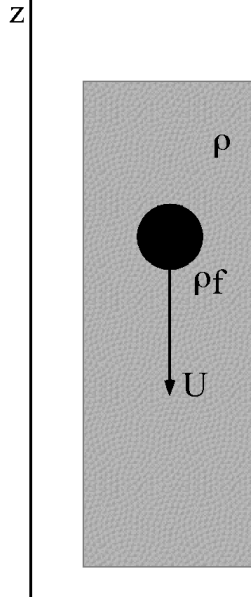
De randvoorwaarden zijn:

$$r = a \quad u(a) = v(a) = 0$$

$$r \rightarrow \infty \quad \begin{cases} u_r \rightarrow U \cos \vartheta, \\ u_\vartheta \rightarrow -U \sin \vartheta, \\ p \rightarrow p_\infty. \end{cases}$$

Door wrijving is de snelheid aan het oppervlak van het bolletje nul. Oneindig ver van het bolletje is de stroming gelijk aan de achtergrondstroming. In Frame 4.1 wordt de oplossing van dit stelsel vergelijkingen met de randvoorwaarden gevonden.

De kracht $\vec{\Sigma}$ op de bol, dus de wrijvingsweerstand, wordt gegeven door $\sigma_{ij}n_j$, zie Figuur 4.5a. De vector $\vec{n}$ is de uitwendige normaal op de bol, in bolcoördinaten is $\vec{n} = (1, 0, 0)$. σ is de spanningstensor, met de componenten (zie (2.21) en de



Figuur 4.4: Een bolvormig deeltje dat onder invloed van zijn eigen gewicht in een verticale vloeistofkolom naar beneden beweegt.

Frame 4.1: Analytische bepaling van de Stokes stroming rond een bol.

De eerste stap in het bepalen van de oplossing van dit probleem is het invoeren van een stroomfunctie $\psi(r, \vartheta)$:

$$\begin{aligned} u_r &= \frac{1}{r^2} \frac{1}{\sin \vartheta} \frac{\partial \psi}{\partial \vartheta} \\ u_\vartheta &= -\frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial \psi}{\partial r}, \end{aligned} \quad (4.9)$$

waarmee automatisch aan (4.6) is voldaan. Vul vervolgens (4.9) in vergelijkingen (4.7) en (4.8), en elimineer de druk:

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{\sin \vartheta}{r^2} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left[\frac{1}{\sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \right] \right]^2 \psi = 0.$$

Omdat de randvoorwaarden voorschrijven dat voor $r \rightarrow \infty$: $\psi(r, \vartheta) \rightarrow \frac{1}{2} U r^2 \sin^2 \vartheta$, proberen we een oplossing te vinden van de vorm $\psi(r, \vartheta) = f(r) \sin^2 \vartheta$. Invullen geeft:

$$\left(\frac{d^2}{dr^2} - \frac{2}{r^2} \right)^2 f = 0.$$

Deze vergelijking heeft oplossingen van het type $f(r) \approx r^\alpha$ wanneer:

$$[(\alpha - 2)(\alpha - 3) - 2][\alpha(\alpha - 1) - 2] = 0 \Rightarrow \alpha = -1, 1, 2, 4$$

en dus is de algemene oplossing

$$f(r) = r^{-1} A + Br + Cr^2 + Dr^4.$$

De condities voor $r \rightarrow \infty$ geven dat $C = U/2$ en $D = 0$ moeten zijn. De condities op $r = a$ bepalen de constanten A en B . Nadat A en B zijn bepaald, is de oplossing:

$$\psi(r, \vartheta) = \frac{1}{4} U (r \sin \vartheta)^2 \left[2 + \left(\frac{a}{r} \right)^3 - 3 \frac{a}{r} \right].$$

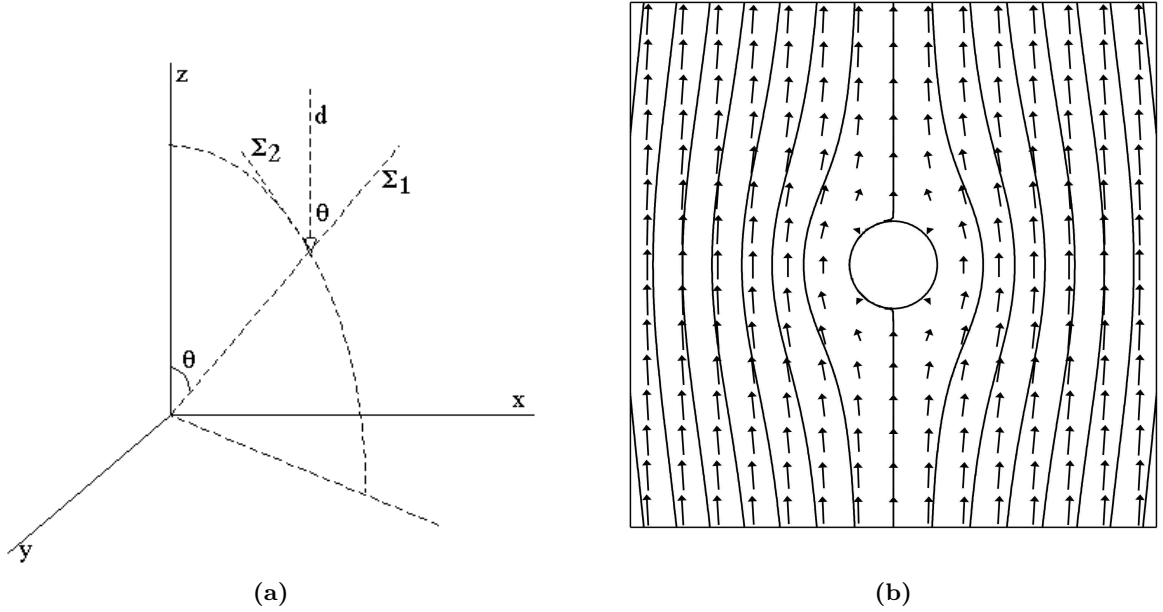
Hieruit volgt het snelheidsveld:

$$\begin{aligned} u_r(r, \vartheta) &= \frac{1}{2} U \cos \vartheta \left[2 + \left(\frac{a}{r} \right)^3 - 3 \frac{a}{r} \right] \\ u_\vartheta(r, \vartheta) &= -\frac{1}{4} U \sin \vartheta \left[4 - \left(\frac{a}{r} \right)^3 - 3 \frac{a}{r} \right]. \end{aligned}$$

De druk wordt bepaald door terugsubstitutie in (4.7):

$$p(r, \vartheta) = p_\infty - \frac{3\mu a}{r^2} U \cos \vartheta$$

Het stromingspatroon is geschetst in Figuur 4.5b.



Figuur 4.5: (a) Geometrie van de krachten op de bol (stippellijn). (b) Stromingspatroon rond een bol.

appendix))

$$\begin{aligned}\Sigma_1 &= \sigma_{11} = -p + 2\mu \frac{\partial u_r}{\partial r} \\ \Sigma_2 &= \sigma_{21} = \mu \left(r \frac{\partial}{\partial r} \frac{u_\vartheta}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \vartheta} \right) \\ \Sigma_3 &= \sigma_{31} = 0.\end{aligned}$$

De kracht is gericht in de negatieve z -richting en vanwege symmetrie is de kracht d per oppervlakte-eenheid op de rand $r = a$ gelijk aan

$$d = \Sigma_1 \cos \vartheta - \Sigma_2 \sin \vartheta$$

Na substitutie van de snelheden en de druk (zie Frame 4.1) volgt

$$d = -p_\infty \cos \vartheta + \frac{3}{2} \frac{\mu U}{a}$$

De totale kracht D is dan

$$D = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi d a^2 \sin \vartheta d\vartheta d\phi = 4\pi a^2 d = 6\pi \mu a U. \quad (4.10)$$

Veronderstel nu dat een deeltje ten gevolge van de zwaartekracht (en opwaartse kracht) met een constante snelheid naar beneden ‘valt’. Deze sedimentatiesnelheid volgt nu uit de krachtenbalans:

$$(m - m')g = D,$$

waarbij m de massa van het bolletje is en m' de hoeveelheid verplaatste vloeistof. Met $m = 4\pi a^3 \rho_f / 3$ en $m' = 4\pi a^3 \rho / 3$ volgt de bekende formule van Stokes

$$U = \frac{2(\rho_f - \rho)ga^2}{9\mu}. \quad (4.11)$$

Hoofdstuk 5

Niet-Newtoniaanse vloeistoffen

Dit hoofdstuk vormt een inleiding tot de stromingsleer van niet-Newtoniaanse vloeistoffen. Voorbeelden van niet-Newtoniaanse vloeistoffen zijn polymeeroplossingen, (stop)verf en ijs. Voor deze vloeistoffen gelden niet de randvoorwaarden zoals genoemd in paragraaf 2.4.1; vergelijking (2.19) is bijvoorbeeld niet geldig. Deze vloeistoffen kunnen zowel visceuze als elastische eigenschappen vertonen, en de respons is soms afhankelijk van voorafgaande vervormingen. Dit alles wordt veroorzaakt door de moleculaire structuur van deze vloeistoffen.

Hier beperken we ons tot de continuüm theorie van isotherme en onsamendrukbare vloeistoffen. In 5.1 laten we een aantal voorbeelden zien van typische gedrag dat het verschil maakt tussen Newtoniaanse en niet-Newtoniaanse vloeistoffen. De kinematica van vloeistoffen waarbij de vervorming niet lineair samenhangt met de spanning zal voor een aantal eenvoudige stromingen bekeken worden in 5.3. Daarvoor bespreken we in 5.2 de formuleringen van kracht en vervorming in meer detail. Tenslotte bekijken we in 5.4 eenvoudige modellen voor een lineaire visco-elastische vloeistof.

5.1 Fenomenologie

Niet-Newtoniaans gedrag van vloeistoffen is in een aantal categorieën op te delen. Behandeld worden spanningsafhankelijke viscositeit, visco-elastisch gedrag en niet-isotroop gedrag.

5.1.1 Spanningsafhankelijke viscositeit

Het eerste voorbeeld laat zien hoe spanningsafhankelijke viscositeit het gedrag van een stroming verandert. We bekijken we twee identieke verticale cilinders waarvan de bodem tot het tijdstip $t = 0$ bedekt is met een plaat. De linker cilinder is gevuld met een Newtoniaanse vloeistof (bijvoorbeeld een water-glycerine oplossing), de rechter met een polymeer oplossing. Deze polymeer oplossing is zo gekozen dat de viscositeit van de oplossing dezelfde is als die van de Newtoniaanse vloeistof bij lage snelheden. De stationaire val-snelheid van een kleine bol door de vloeistof is bijvoorbeeld voor beide vloeistoffen gelijk.

Op $t = 0$ wordt de bodemplaat verwijderd. Als de rechter cilinder veel sneller leegstroomt dan de linker noemen we de polymeeroplossing *pseudoplastisch*. Bedenk dat in het Newtoniaanse geval het debiet omgekeerd evenredig is met de (constante) viscositeit. Bij een pseudoplastische vloeistof neemt dus de viscositeit af bij toenemende schuifspanning. Pseudoplastisch gedrag is tamelijk algemeen voor vloeistoffen met complexe molecuulstructuur, zoals polymeren. Ook als complexe moleculen gemengd worden in een Newtoniaanse vloeistof, bijvoorbeeld water, kan het geheel pseudoplastisch gedrag krijgen. Voorbeelden hiervan zijn pulp (houtvezels en water), stroop (suiker en water) en bloed.

Er zijn ook niet-Newtoniaanse vloeistoffen waarvoor de rechter cilinder minder snel leegstroomt dan de linker. Deze vloeistoffen worden *dilatant* genoemd. Voor een dilatante vloeistof neemt de viscositeit toe bij een grotere schuifspanning. Dilatante vloeistoffen zijn tamelijk zeldzaam, een voorbeeld is het polymeer ‘Silly Putty’.

Dan zijn er nog vloeistoffen die helemaal niet gaan stromen tenzij er een kritische schuifspanning is overschreden. Dit is de zogenaamde vloeigrens ('yield stress'). Deze vloeistoffen worden *viscoplastisch* genoemd. Bij een parallelle stroming met snelheidsveld $\vec{u} = (0, 0, w(r))$ in een cilinder ten gevolge van de zwaartekracht wordt de balans van krachten gegeven door schuifspanning τ_{31} gegeven door

$$\rho g = \frac{1}{r} \left[\frac{\partial}{\partial r} (r \tau_{31}) \right] \quad (5.1)$$

waar de schuifspanning τ_{31} is, ρ de dichtheid van de vloeistof, g de zwaartekrachtsversnelling en r de radiële coördinaat. Integratie geeft

$$\frac{1}{2} \rho g r = \tau_{31}.$$

Als voor zekere $r_0 < R$ - waarbij R de straal van de cilinder is - de vloeigrens is bereikt dan zal de vloeistof voor $r < r_0$ als een prop stromen en varieert de snelheid met r alleen in het gebied $r_0 < r < R$. Als de vloeigrens groter is dan $\rho g R/2$, dan zal de vloeistof niet gaan stromen.

Een Bingham vloeistof is een speciaal geval van een viscoplastische vloeistof. Voor spanningen kleiner dan de vloeigrens vindt er geen deformatie plaats. Wordt de vloeigrens overschreden, dan neemt de vervormingssnelheid¹ lineair toe met de spanning, net zoals dat voor Newtoniaanse vloeistof het geval is.

Figuur 5.1 geeft schematisch voor de verschillende vloeistoftypes de relatie tussen spanning, vervormingssnelheid, en viscositeit. Bij een Newtoniaanse vloeistof neemt de spanning die nodig om een bepaalde vervormingssnelheid te krijgen, lineair toe. Voor een pseudoplastische vloeistof is steeds minder extra spanning nodig om extra vervormingssnelheid te krijgen, de viscositeit neemt dus af met toenemende spanning. Voor een dilatante vloeistof is juist het omgekeerde het geval, steeds meer extra spanning is nodig om extra vervormingssnelheid te krijgen. Bij een Bingham vloeistof zijn, voor spanningen groter dan de vloeigrens, de vervormingssnelheid en de spanning weer lineair gekoppeld. De viscositeit neemt daardoor boven de vloeigrens omgekeerd evenredig af.

¹Het begrip vervormingssnelheid is in Frame 2.1 uitgewerkt. In dit voorbeeld is de vervormingssnelheid $\partial w / \partial r$: de snelheidsgradiënt binnen de pijp.

²De stroming tussen twee roterende cilinders is in eerste orde gelijk aan $\vec{u} = (0, v(r), 0)$. Wrijving over de bodem voegt hier een circulatie dwars op deze stroomrichting aan toe. De vloeistof stroomt dan over de bodem van buiten naar binnen, stijgt daar omhoog en stroomt dan naar buiten af.

5.1.2 Niet isotrope vloeistoffen

De effecten van een niet isotrope vloeistof op de vloeistofbeweging kan heel divers en verrassend zijn. In deze paragraaf worden tweetal voorbeelden van dit niet-Newtoniaanse gedrag besproken.

Weissenberg-effect

Een voorbeeld (zie Figuur 5.2a en 5.2b) is de stroming veroorzaakt door een roterende cilinder en een ronde beker met vloeistof. In de linker beker bevindt zich een glycerine oplossing; in de rechter een polymeer oplossing. Het stromingspatroon in de Newtoniaanse vloeistof is zoals verwacht: de vloeistof nabij de draaiende cilinder wordt naar buiten gedrukt door de centrifugale kracht en het vloeistofpeil is maximaal aan de rand van de cilinder. Het gedrag van de polymeeroplossing is echter totaal anders: de vloeistof klimt omhoog tegen de cilinder. Dit fenomeen wordt het Weissenberg-effect genoemd.

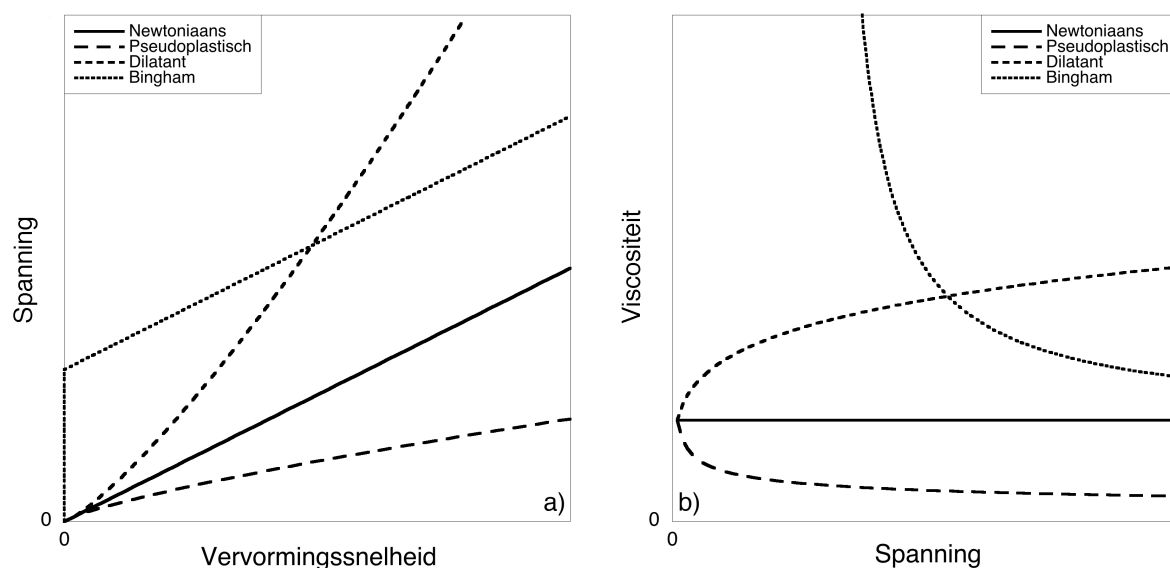
Als beide vloeistoffen visceus zijn, is voor beide stromingen het Reynoldsgetal klein en de stroming laminair, en bij constante forcering ook stationair. Bij benadering² is de stroming axisymmetrisch met snelheidsveld $\vec{u} = (0, v(r), 0)$. Als we de impulsbalans in radiële richting van deze stroming bekijken (zie Frame 5.1 voor een opmerking over de afleiding van deze impulsbalans):

$$-\frac{\rho v^2}{r} = \frac{1}{r} \left[\frac{\partial}{\partial r} [r \sigma_{11}] - \sigma_{22} \right] \quad (5.2)$$

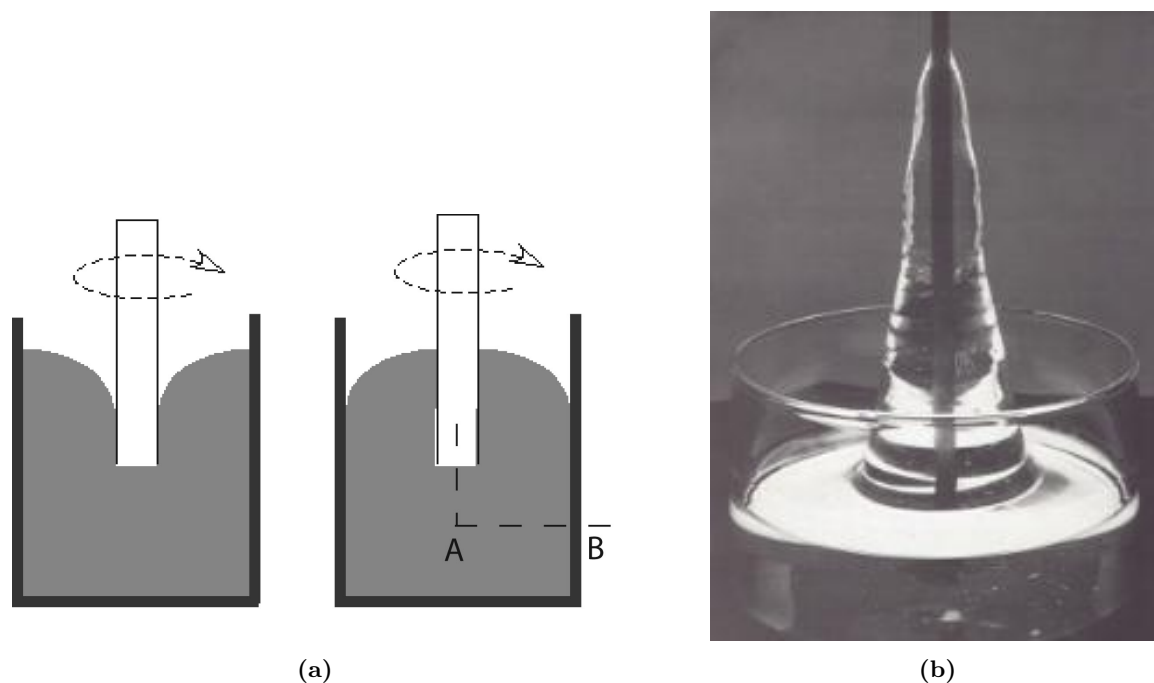
dan volgt door integratie van A naar B (zie Figuur 5.2a)

$$\sigma_{11}(r_B) - \sigma_{11}(r_A) = - \int_{r_A}^{r_B} \frac{\rho v^2}{r} + \frac{1}{r} (\sigma_{11} - \sigma_{22}) dr \quad (5.3)$$

Voor een parallelle Newtoniaanse vloeistof geldt dat $\sigma_{11} = \sigma_{22} = -p$, daarom blijft in de rechter integraal alleen de centrifugale kracht over. Deze kracht is negatief en dus $p_A < p_B$, dus het vloeistofpeil is lager in het midden dan aan de rand. Bij het voorbeeld met de polymeer-oplossing is de vloeistofpeil juist het hoogst in het midden, in dit geval moet het rechterlid positief zijn. Omdat de centrifugaalkracht niet wezenlijk verandert, moet



Figuur 5.1: *Schets van de relatie tussen spanning en de vervormingssnelheid (a) en spanning en viscositeit (b) voor Newtoniaanse, pseudoplastische, dilatante en Bingham vloeistoffen.*



Figuur 5.2: (a) *In een bak wordt een vloeistof door een draaiende staaf in beweging gebracht. (links) een Newtoniaanse vloeistof en (rechts) een visco-elastische vloeistof. A en B verwijzen naar het integratiepad in de tekst. (b) Illustratie van het 'Weissenberg' effect. De vloeistof heeft zich opgehoopt rond de draaiende staaf. bron: "Rheological Phenomena in Focus" van D.V. Boger en K. Waters.*

Frame 5.1: *Tangentiële krachten in een cilindrisch assenstelsel.*

Bedenk dat in een cilindrisch assenstelsel (r, θ, z) , de tangentiële krachten die op een klein volume elementje werken niet parallel zijn (zie de figuur in dit frame). De resultante (normaal) spanning op de oppervlakjes $dr dz$ is $-\sigma_{22} d\theta$ (een min-teken omdat de kracht binnen is gericht). De kracht per volume elementje $r dr d\theta dz$ is dan

$$-\frac{\sigma_{22} d\theta dr dz}{r dr d\theta dz} = -\frac{\sigma_{22}}{r}.$$

In de radiële richting is de resultante kracht $\sigma_{11}(r+dr) (r+dr) d\theta dz - \sigma_{11}(r) r d\theta dz$. Na een Taylor reeks ontwikkeling

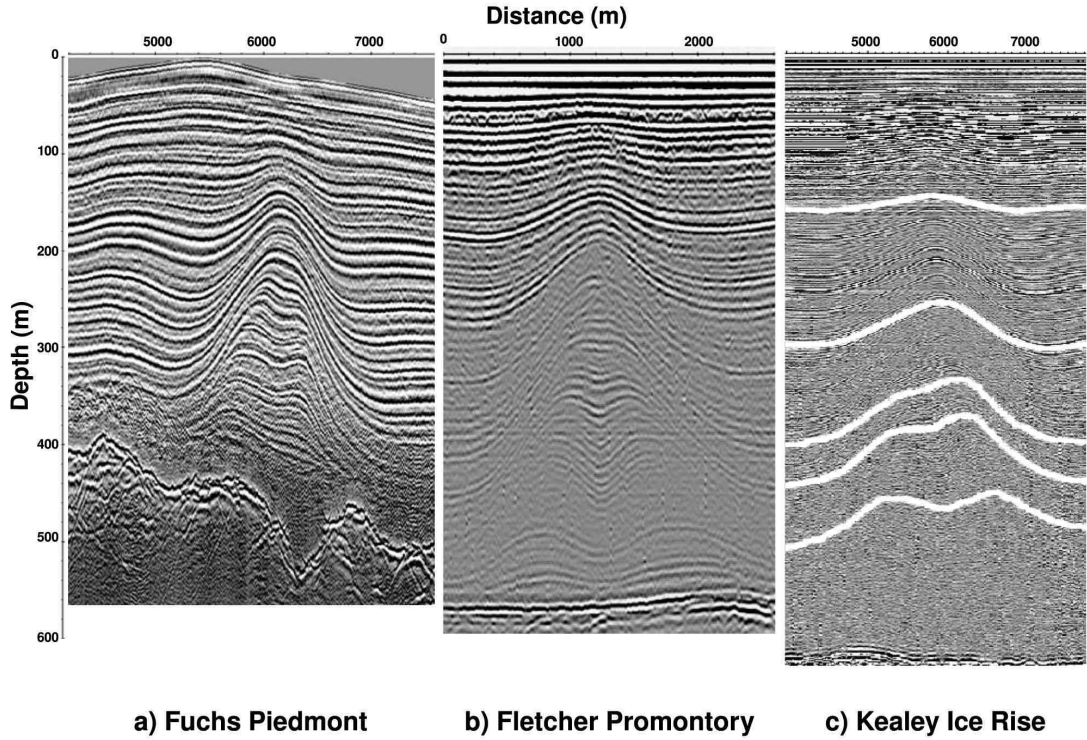
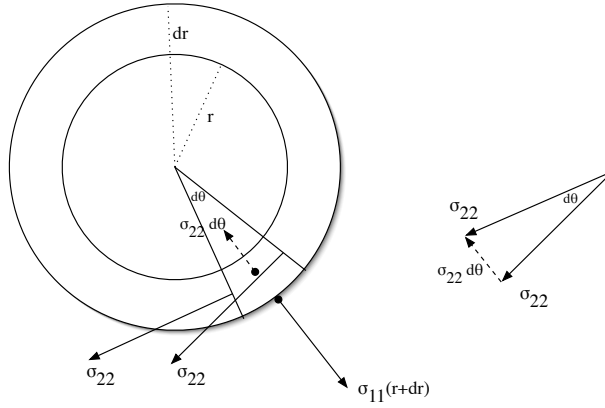
volgt dat de resultante kracht gelijk is aan

$$\frac{\partial \sigma_{11}}{\partial r} r d\theta dz dr,$$

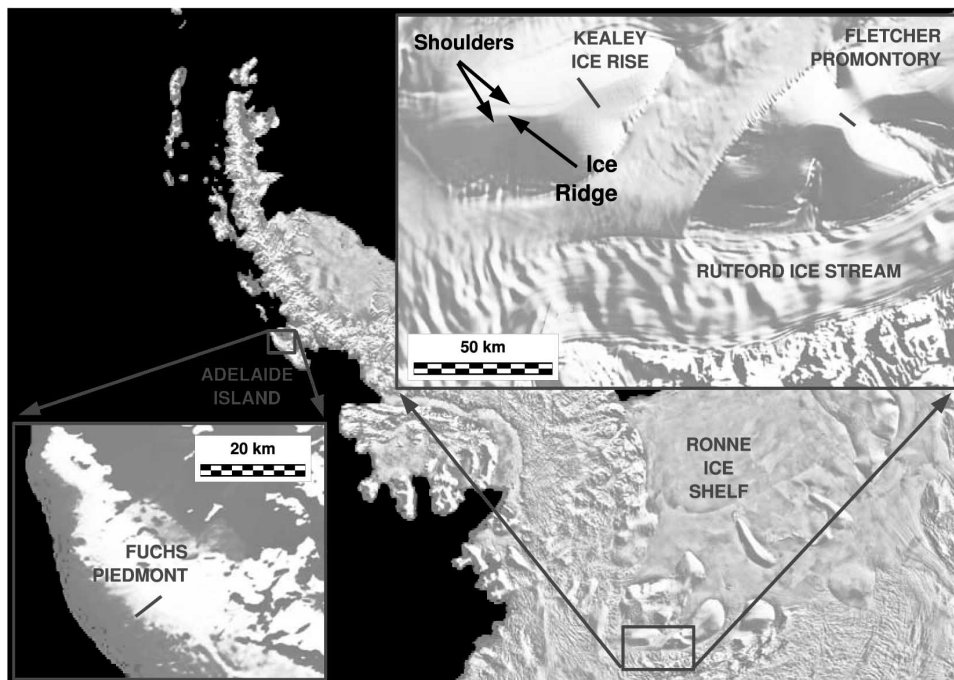
en dus per volume eenheid

$$\frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial r} r.$$

Als we veronderstellen dat deze krachten en de centrifugale kracht ($\rho v^2/r$) balanceren, dan volgt vergelijking (5.2).



Figuur 5.3: Radarreflectiebeelden van drie kleine ijskappen op Antarctica (Figuur 5.4) met daarin Raymond bumps. Bij (a) is de diepte ten opzichte van de top, bij (b) en (c) is de diepte ten opzichte van het oppervlak. Uit Martín et al. (2009) JGR 114, F04001.



Figuur 5.4: Satellietopname van West Antarctica, met vergrotingen van drie sub-ijskappen waarin Raymond bumps worden gevonden. Op de Kealey Ice Rise zijn het duidelijkst de ‘shoulders’ te zien, relatief kleine dalen parallel aan de rug van de ijskap. De lijnen loodrecht op de ruggen geven de locaties van de radarreflectiebeelden. Uit Martín et al. (2009) JGR 114, F04001.

daarom $\sigma_{11} - \sigma_{22}$ negatief zijn, en groter dan de centrifugale term. Er treden dus merkwaardige normaalkrachten op bij het Weissenberg effect.

Raymond bumps

Een ander voorbeeld van niet-isotroop gedrag is het ontstaan van ‘Raymond bumps’ (Figuur 5.3) in het ijs in regionale van de ijskap van Antarctica (Figuur 5.4). Antarctica is zo koud dat er vrijwel nergens significante smelt optreedt. Alle sneeuw die op Antarctica valt, moet daarom via ijsstroming door de zwaartekracht worden afgevoerd naar de oceaan. Op de meeste plekken maakt het ijsoppervlak daarom een flauwe helling, de zwaartekracht drijft zo een visceuze schuifstroming van ijs aan. De export van ijs is veelal geconcentreerd in gletsjers die door diepe troggen stromen. Naast die gletsjers vormen zich met de grote ijskap verbonden kleinere ijskapjes. Op de top en op subtoppen van de ijskap is deze helling echter nul, het ijs staat hier dus stil. Toch stroomt ook hier het ijs geleidelijk weg. Naast de betreffende top ligt het oppervlak lager, dus er is in het ijs een drukverschil tussen de top en daarnaast. Dit drukverschil zorgt ervoor dat het ijs

samengeperst wordt, en op die manier geleidelijk wegstroomt.

Omdat het ijs vanaf een top niet schuift, blijft de chronologie van het ijs volkomen behouden. Daarom is de top van een ijskap de ideale plek om ijskernen te boren, om zo de karakteristieken van het ijs te bepalen, en daarmee inzicht te krijgen over het klimaat van vroeger. Het ijs nabij de (rots)bodem is het oudst, en aan het oppervlak het jongst. Aan het oppervlak heeft een jaarlaag sneeuwaangroei zijn oorspronkelijke dikte, door het samenpersen neemt die dikte af naar mate men dichterbij de bodem komt.

Het ijs in een ijskap heeft dus een chronologische opstapeling. Bij de top is die het best bewaard; naarmate je daar verder vandaan komt, wordt deze chronologie bij de bodem steeds meer verstoord door ijsstroming. De chronologie kun je terugvinden in een ijskern, maar ook als je met een radar in het ijs meet. Bijzondere gebeurtenissen, zoals vulkaanuitbarstingen of stofstormen, vormen laagjes met een hogere radar-reflectiviteit. Door over de ijskap te rijden en continue radarbeelden te maken, kun je deze lagen volgen, en krijg je observaties zoals Figuur 5.3.

Opvallend in Figuur 5.3 is dat bij (nabij) de top de lagen naar het oppervlak komen, deze bulten worden Raymond bumps genoemd. Onder de top zijn de diepere lagen dus veel dikker dan naast de top. Het ijs op de top nabij het oppervlak stroomt dus relatief snel zijdelings weg. Als je deze ijsstroming gaat modelleren met een ijsmodel, dan ontstaan er geen bulten van deze omvang zolang je veronderstelt dat het ijs isotroop is (Figuur 5.5). Raymond bumps ontstaan omdat het ijs in deze bulten veel harder is dan daarbuiten. Op precies te zijn, het ijs is veel harder bij spanningen in verticale richting.

Wat is nu de verklaring dat ijs in het algemeen isotroop is, maar in dit specifieke geval niet? IJs in ijskappen zoals Antarctica is daar gekomen door sneeuwval. Het ijs bestaat dus uit samengeperste losse kristallen, dit in tegenstelling tot bijvoorbeeld ijs op een bevroren meer, dat veel meer isomorf is. De moleculestructuur van water zorgt ervoor dat ijs in laagjes bevriest (Figuur 5.6), net als basalt. Zo'n laagje schuift relatief makkelijk heen en weer over een boven of onderliggend laagje, maar breekt relatief moeilijk. Binnen een ijskristal is de oriëntatie van de laagjes gelijk; een ijskristal is dus over één as veel harder dan over de twee andere assen. Een ijskristal is dus niet isotroop. Maar omdat in principe de oriëntatie van de ijskristallen willekeurig is, heffen in normaal ijs ontstaan uit samengeperste sneeuw de oriëntaties elkaar op en is dit ijs netto isotroop.

IJs onder een ijskaptop ondervindt maar één type deformatie, namelijk compressie over de verticale as. Ijskristallen met een oriëntatie in horizontale richtingen deformeren onder die druk makkelijker dan ijskristallen met een oriëntatie in de verticale richting. De kristallen die deformeren, platten dus af, en verdwijnen dus netto uit het ijspakket. Door die selectieve deformatie krijgt het ijs een oriëntatie, namelijk in de verticaal. Daardoor wordt het ijs harder voor compressie in de verticaal, en zachter voor spanningen in horizontale richtingen. Dit verschil in hardheid is in een Raymond-bump een ongeveer factor 10, dus 10 keer harder/zachter dan isotroop ijs.

Gezien dit fysische proces, lijkt het onlogisch dat dicht bij de bodem niet een enkele, maar een dubbele bult wordt gevonden. Dit komt door interactie tussen *fabric* ($\sim$ ijskristaltoestand) en stroming. Deze dubbele bulten, en hun oppervlakte representatie met de 'schouders', hebben dus enige tijd (~ 4000 jaar voor de getoonde rug-

gen) nodig om te ontstaan. De top van een ijskap met 'schouders' ligt dus al enige tijd stabiel, terwijl het ontbreken van 'schouders' kan betekenen dat de top mobiel is. Dit is ook het geval als de Raymond bumps niet meer onder de top liggen, zoals bijvoorbeeld bij Fuchs Piedmont (Figuur 5.3a).

5.1.3 Visco-elastisch gedrag

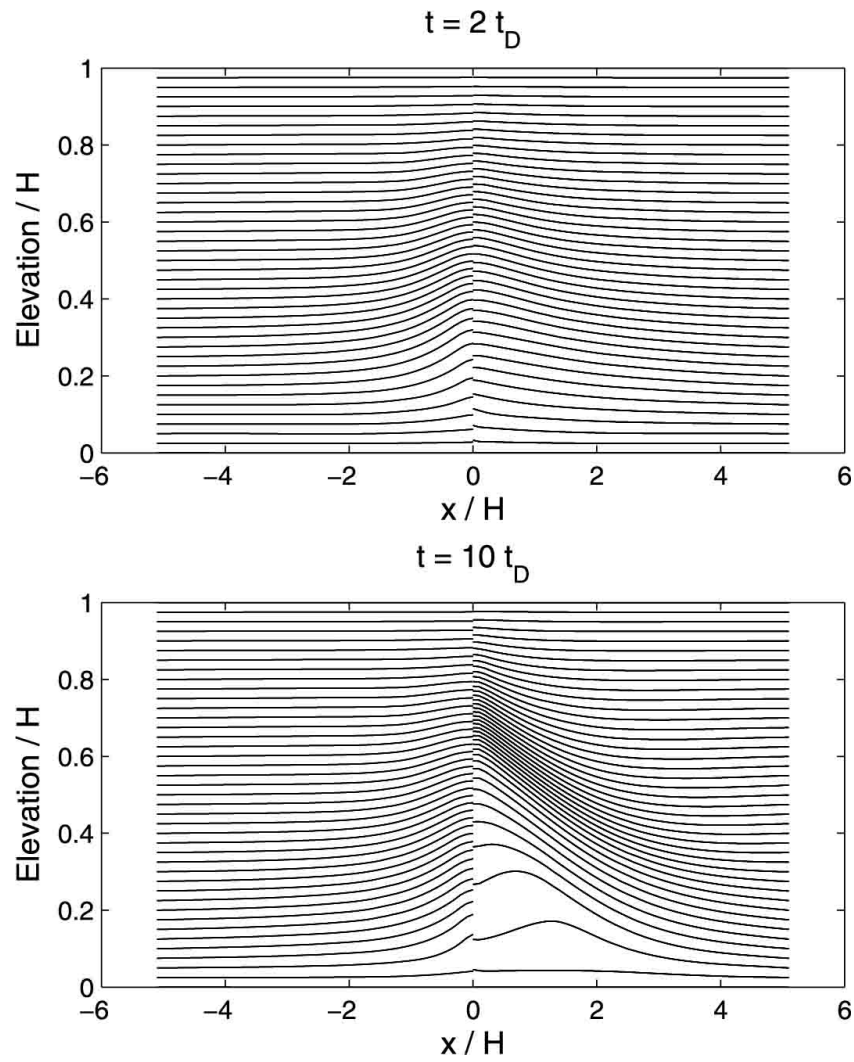
Het volgende voorbeeld laat niet-Newtoniaans gedrag door visco-elasticiteit³ zien. In dit experiment persen we vloeistof vanuit een groot reservoir door een cilindrische buis met lengte L en diameter D (Figuur 5.7). In technische bewoordingen, we extruderen een vloeistof. Het interessante gedrag treedt op wanneer de vloeistof de buis verlaat. Als we dit met een Newtoniaanse vloeistof doen, bijvoorbeeld een siliconen olie, dan is de uittredende diameter D_e kleiner dan D . Voor een polymeer-oplossing is in het algemeen D_e groter dan D ; dit wordt 'extrudate swell' of 'jet swell' genoemd. Het belang van deze 'jet swell' in de plastic- en vezelindustrie is enorm. Als rayon wordt gesponnen, neemt de diameter van de vezel met ongeveer 10% toe (afhankelijk van procescondities).

Men kan het verschijnsel ten dele verklaren door aan te nemen dat de vloeistof de capaciteit heeft om de intree regio van de cilinder te 'herinneren'. Met andere woorden, een gedeelte van de vervorming is niet visceus, dus blijvend, maar elastisch, dus tijdelijk. Als de lengte van cilinder niet te lang is, dan zal de vloeistof bij stroming uit de cilinder zijn oorspronkelijke vorm aannemen. De diameter verhouding D_e/D wordt inderdaad kleiner bij grotere L . De verhouding nadert echter niet naar 1 voor $L/D \rightarrow \infty$ en de 'geheugen' eigenschap van de vloeistof is niet voldoende om het totale verschijnsel te verklaren.

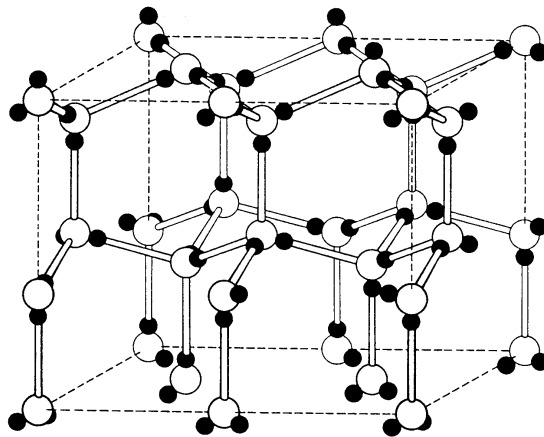
Beschouw in het volgende experiment een stilstaande polymeer oplossing in een horizontale bak. Een hoeveelheid actieve kool wordt verticaal in de vloeistof aangebracht. Op $t = 0$ (Figuur 5.8, zwarte lijn) wordt een drukgradiënt aangelegd zodat de vloeistof gaat stromen. Na enige tijd wordt deze gradiënt opgeheven (rode lijn). Waargenomen wordt dat de actieve kool zich terugtrekt (via de gele en groene lijn naar de blauwe lijn); de vloeistof springt dus terug ('recoils').

Een ander voorbeeld is de inslag van een visco-

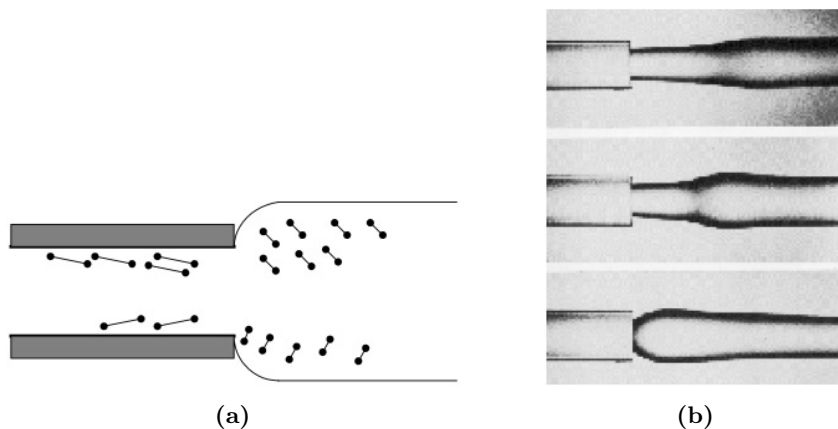
³Let op, viscoplastisch is niet hetzelfde als visco-elastisch.



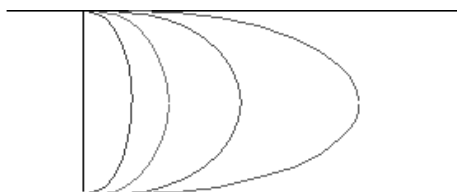
Figuur 5.5: Vergelijking van isolijnen van isotroop model (blauw, links) en niet isotroop model (rood, rechts). De Raymond bump heeft enige tijd nodig om te ontstaan. De tijdschaal t_D is gedefinieerd als $t_D = H/a$; H is de dikte van de ijskap en a de jaarlijkse sneeuwaccumulatie. Uit Martín et al. (2009) JGR 114, F04001.



Figuur 5.6: Schets van de structuur van een ijskristal



Figuur 5.7: *Uitstroom van een visco-elastische vloeistof. (a) schematisch: door de schuifspanning langs de wand in de buis treedt elastische uitrekking op. bij het uittredende 'veert' de vloeistof terug (lengterichting) waardoor ten gevolge van continuïteit verdikking optreedt. (b) een foto-opname laat zien dat de plaats waar de verdikking optreedt verschuift afhankelijk van de uitstroomsnelheid (bron: Luca Brandt & Christophe Duwig, http://www2.mech.kth.se/luca/html_lib/dieswell.html).*



Figuur 5.8: *Een paar schetsen van een 'terugspringend' vloeistoffront ten gevolge van het opheffen van de drukgradiënt.*

elastische druppel. Een visceuze druppel spat uit-een, een elastische druppel, een stuiterbal, veert terug en behoudt een groot gedeelte van zijn bewegingsenergie. Zoals Figuur 5.9 laat zien, doet een visco-elastische druppel iets daar tussenin. Eerst lijkt de druppel plat te slaan op het oppervlak, maar de druppel wil terug naar oorspronkelijke vorm en veert terug van het oppervlak.

De twee belangrijkste eigenschappen die naar voren komen uit deze voorbeelden zijn elasticiteit en een vervagend geheugen. Visco-elastische vloeistoffen gaan, net zoals vaste stoffen, terug naar de onvervormde toestand, als de spanning wordt opgeheven. Een vervagend geheugen, een vervagend geheugen, ‘fading memory’, impliceert dat de vloeistof herinnert waar het vandaan kwam, maar dat het geheugen recente configuraties beter herinnert dan degenen daarvoor. Vanwege dit vervagend geheugen springt de vloeistof niet helemaal terug naar de begintoestand.

5.2 Kracht, vervorming en spanningsafhankelijke viscositeit

Een grondige beschouwing van de kinematica van een algemene niet-Newtoniaanse vloeistof valt buiten dit college; een grondige kennis van tensorrekening is noodzakelijk en bovendien is de informatie in dit hoofdstuk al extra informatie. We zullen ons hier en de volgende paragrafen beperken tot enkele simpele reologische modellen die toegepast worden op een beperkte klasse van stromingen en vloeistoffen.

Eerder hebben we gezien dat een incompressibele, isotherme Newtoniaanse vloeistof gekarakteriseerd wordt door twee grootheden, de dynamische viscositeit μ en de dichtheid ρ . Deze karakterisatie is onafhankelijk van het stromingsveld en de geometrie: voor elk experiment vindt men dezelfde waarde van ρ en μ . Voor niet-Newtoniaanse vloeistoffen is deze situatie afwezig en leidt elk experiment tot zogenaamde materiaalfuncties die afhangen van schuifspanning en bijvoorbeeld tijd. Deze materiaalfuncties worden gebruikt om vloeistoffen te classificeren en om constanten in reologische modellen te bepalen. In deze paragraaf worden een aantal standaard stromingstypen besproken die hiervoor worden gebruikt.

Spanningsafhankelijke viscositeit

We beschouwen een reologisch model van een niet-Newtoniaanse vloeistof dat in staat is de schuifspanningsafhankelijke viscositeit te beschrijven: de gegeneraliseerde Newtoniaanse vloeistof. Hiervoor formuleren we algemene relatie tussen de vervormingssnelheid en de schuifspanning als

$$\boldsymbol{\tau} = -\eta \dot{\boldsymbol{\gamma}},$$

waar η een scalaire functie is, die van een nog nader te specificeren aantal factoren afhankelijk kan zijn. Zie voor de definitie van $\dot{\boldsymbol{\gamma}}$ Frame 2.1 op pagina 21. Deze functie legt een relatie tussen twee tensoren die ongeacht de keuze van het coördinatensysteem steeds dezelfde moet zijn. Voor Newtoniaanse vloeistoffen is η alleen gerelateerd aan de materiaaleigenschappen en dus een (temperatuurafhankelijke) constante voor een bepaalde vloeistof. Voor niet-Newtoniaanse vloeistoffen varieert η enorm met de afschuifspanning, soms wel met een factor 1000. Het is duidelijk dat dit soort effecten niet verwaarloosd kunnen worden. Als η afhangt van $\boldsymbol{\tau}$ of $\dot{\boldsymbol{\gamma}}$, kan dat alleen maar zijn via de invarianten van die tensoren, want die blijven bij een coördinatentransformatie onveranderd. Zie Frame 5.2 voor een korte uitleg over invarianten. Een coördinaatstransformatieonafhankelijke formulering is nodig omdat we wel nog steeds veronderstellen dat de vloeistof isotroop is. Voor een gegeneraliseerde Newtoniaanse vloeistof geldt dan

$$\boldsymbol{\tau} = -\eta(I_{\dot{\boldsymbol{\gamma}}}, II_{\dot{\boldsymbol{\gamma}}}, III_{\dot{\boldsymbol{\gamma}}}) \dot{\boldsymbol{\gamma}}$$

De functie η is dus een functie van de invarianten van de tensor $\dot{\boldsymbol{\gamma}}$.

Uit de definitie van $\dot{\boldsymbol{\gamma}}$ volgt dat $I_{\dot{\boldsymbol{\gamma}}} = 0$. De afhankelijkheid van de derde variant wordt verwaarloosd zodat

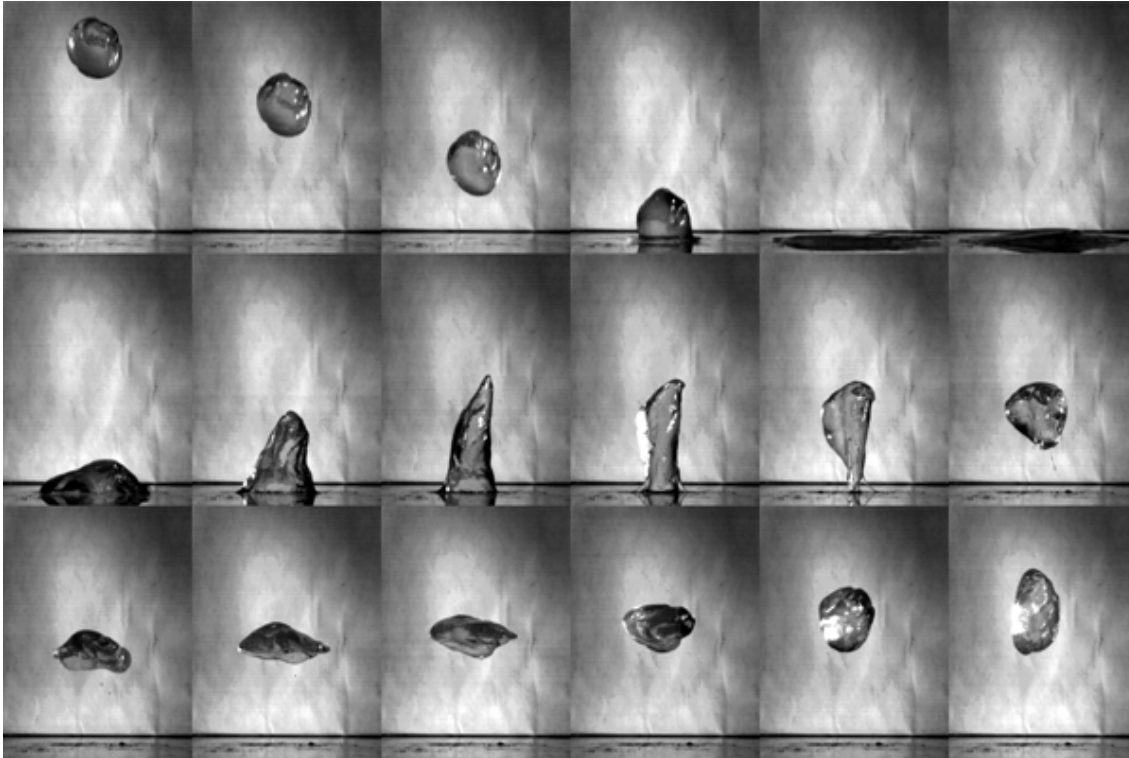
$$\boldsymbol{\tau} = -\eta(II_{\dot{\boldsymbol{\gamma}}}) \dot{\boldsymbol{\gamma}}; \quad (5.4)$$

de viscositeit η hangt daarmee af van de lengte van de vervormingssnelheidstensor, met andere woorden, de totale vervormingssnelheid. Dit noteren we in het vervolg als

$$\boldsymbol{\tau} = -\eta(|\dot{\boldsymbol{\gamma}}|) \dot{\boldsymbol{\gamma}}. \quad (5.5)$$

5.3 Spanningsafhankelijke viscositeit

De relatie tussen de niet-Newtoniaanse viscositeit η en $|\dot{\boldsymbol{\gamma}}|$ wordt meestal via empirische weg vast-



Figuur 5.9: *Het afketsen van visco-elastische druppel.*

(<http://www.aps.org/units/dfd/pressroom/gallery/viscoelastic.cfm>)

Frame 5.2: Invarianten

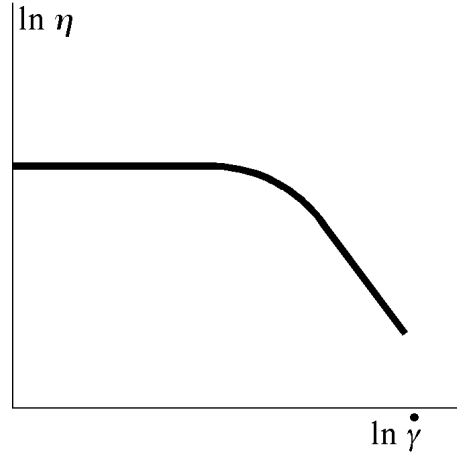
Een tweede orde tensor $\boldsymbol{\tau}$ met componenten τ_{ij} waarbij $i, j = 1, 2, 3$ heeft drie invarianten I_τ , Π_τ en III_τ . De waarden van deze grootheden (scalars) hangen niet af van de keuze van het coördinatenstelsel. Zij zijn gedefinieerd als

$$I_\tau = \text{tr}(\boldsymbol{\tau}) = \sum_i \tau_{ii}$$

$$\Pi_\tau = \frac{1}{2} \text{tr}(\boldsymbol{\tau} \times \boldsymbol{\tau}) = \frac{1}{2} \sum_i \sum_j \tau_{ij} \tau_{ji}$$

$$\text{III}_\tau = \frac{1}{3} \text{tr}(\boldsymbol{\tau} \times (\boldsymbol{\tau} \times \boldsymbol{\tau})) = \frac{1}{3} \sum_i \sum_j \sum_k \tau_{ij} \tau_{jk} \tau_{ki}.$$

I_τ is dus het spoor van $\boldsymbol{\tau}$, Π_τ de lengte van $\boldsymbol{\tau}$ en III_τ de determinant van $\boldsymbol{\tau}$. In drie dimensies kan de determinant worden opgevat als het georiënteerde volume van parallellepipedum gevormd door de vectoren in de tensor $\boldsymbol{\tau}$.



Figuur 5.10: *log-log plot van η als functie van de vervormingssnelheid $|\dot{\gamma}|$.*

gelegd. Het eerste model wat we introduceren is de ‘Power-law’ vloeistof, het tweede de Bingham vloeistof

5.3.1 ‘Power-law’ vloeistof

Dit model is gemotiveerd door resultaten zoals in Figuur 5.10, waar voor grote afschuifsnellheden een log – log plot van η tegen $|\dot{\gamma}|$ een rechte lijn geeft. Voor η veronderstellen we

$$\eta(|\dot{\gamma}|) = m |\dot{\gamma}|^{n-1}$$

waarbij m en n constanten zijn die van het type vloeistof en de procescondities afhangen. Hiermee wordt (5.5)

$$\boldsymbol{\tau} = -m |\dot{\gamma}|^{n-1} \dot{\boldsymbol{\gamma}}. \quad (5.6)$$

Voor $n < 1$ is de vloeistof pseudoplastisch en voor $n > 1$ is de vloeistof dilatant (‘uitzettend’). In het geval van $n = 1$ is de vloeistof Newtoniaans en is $m = \mu$. De (bij benadering) inverse relatie van vergelijking (5.6) ($\dot{\boldsymbol{\gamma}} = A\boldsymbol{\tau}^n$) staat in de glaciologie bekend als de wet van Glen (*Glen’s Law*). Merk op dat de macht n in de wet van Glen is niet gelijk is aan n in vergelijking (5.6).

Vlakke Couette/Poiseuille stroming van een ‘Power-law’ vloeistof

Om inzicht te krijgen in dit model behandelen we nu een eenvoudig voorbeeld. Beschouw een stroming tussen twee vlakke platen waarvan de bovenste met snelheid U naar rechts beweegt. De stroming wordt tevens aangedreven door de constante

horizontale drukgradient $(p_L - p_0)/L = -\alpha$. Een stationaire parallelle stroming met snelheidsveld $\vec{u} = (u(z), 0, 0)$ is het gevolg.

De impulsbalans in x -richting (met $\boldsymbol{\sigma} = -p\mathbf{I} + \boldsymbol{\tau}$) is

$$-\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{13}}{\partial z} = 0,$$

met als oplossing

$$\tau_{13} = \alpha z - \lambda,$$

waarbij λ een integratieconstante is. Voor een ‘Power-law’ vloeistof geldt

$$\begin{aligned} \tau_{13} = -\eta(|\dot{\gamma}|) \dot{\gamma}_{13} &= -m |\dot{\gamma}|^{n-1} \dot{\gamma}_{13} = -\frac{m}{2^n} \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)^n \\ &= -m' \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)^n, \end{aligned} \quad (5.7)$$

zodat

$$m' \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)^n = \lambda - \alpha z \quad (5.8)$$

Als we deze vergelijking willen oplossen, blijkt dat we onderscheid moeten maken tussen twee gevallen:

- a) $u(z)$ heeft geen extreem op $z \in (0, H)$.
- b) $u(z)$ heeft een extreem op $z \in (0, H)$.

In het eerste geval kunnen we (5.8) rechtstreeks integreren en vinden we

$$u(z) = \beta - \frac{m'}{\alpha(s+1)} \left(\frac{\lambda}{m} - \alpha \frac{z}{m} \right)^{s+1} \quad (5.9)$$

met $s = 1/n$ en β een tweede integratieconstante. Deze constanten worden bepaald door de randvoorwaarden $u(0) = 0, u(H) = U$ en we vinden

$$\frac{u(z)}{U} = \frac{\lambda_0^{s+1} - (\lambda_0 - \frac{z}{H})^{s+1}}{\lambda_0^{s+1} - (\lambda_0 - 1)^{s+1}}, \text{ met } \lambda_0 = \lambda/\alpha H,$$

waar de constante λ_0 volgt uit

$$\frac{\alpha H}{m} \left(\frac{H}{U} \right)^{1/s} = \left(\frac{s+1}{\lambda_0^{s+1} - (\lambda_0 - 1)^{s+1}} \right)^{1/s}.$$

Voor het geval b) moeten we het interval splitsen en krijgen we eenzelfde type resultaat.

Figuur 5.11a schetst de verschillen in respons van pseudoplastische en dilatante vloeistoffen. Pseudoplastische vloeistoffen vervormen het sterkst waar de spanning het hoogst is, dus langs de platen. De vloeistof stroomt er dus ongeveer als een prop uit. De maximale stroomsnelheid neemt ook veel sterker dan lineair toe als de druk verhoogd wordt. De respons van dilatante vloeistof is juist tegenovergesteld. De grootste snelheidsverschillen zijn waar de spanning het laagst is, namelijk midden tussen de platen. De maximale stroomsnelheid neemt ook maar nauwelijks toe als de druk verhoogt wordt.

5.3.2 Bingham vloeistof

Een tweede voorbeeld van een niet-Newtoniaanse viscositeit is een Bingham vloeistof. Dit is een model voor een vloeistof met een vloeigrens τ_0 . Voor de viscositeit geldt dat

$$\begin{aligned} \eta(|\dot{\gamma}|) &= \infty & \text{voor } |\tau| < \tau_0 \\ \eta(|\dot{\gamma}|) &= \mu + \tau_0/|\dot{\gamma}| & \text{voor } |\tau| > \tau_0. \end{aligned}$$

Dus de uiteindelijke vergelijking is

$$\begin{aligned} 0 &= \dot{\gamma} & \text{voor } |\tau| < \tau_0 \\ \left(1 - \frac{\tau_0}{|\tau|}\right) \tau &= -\mu \dot{\gamma} & \text{voor } |\tau| > \tau_0. \end{aligned}$$

Stroming van een Bingham vloeistof tussen twee verticale platen

Beschouw een Bingham vloeistof die zich tussen twee platen bevindt die op een afstand d van elkaar zijn geplaatst. De stroming tussen de platen wordt veroorzaakt door de zwaartekracht; een axiale drukgradient is afwezig. De impulsbalans in x -richting wordt

$$\frac{\partial \tau_{31}}{\partial x} = \rho g$$

met als oplossing

$$\tau = \tau_{31} = \rho g x + \lambda,$$

waar λ een integratieconstante is. Vanwege symmetrie moet gelden dat $\tau(d/2) = 0$ en dus wordt $\lambda = -\rho g d/2$; we hoeven ook alleen maar de situatie op $(d/2, d)$ te bekijken. Veronderstel dat de vloeigrens gegeven wordt door τ_0 . Indien dan de vergelijking

$$\tau_0 = \rho g \left(x - \frac{d}{2}\right) \quad (5.10)$$

geen oplossing heeft voor $x \in (d/2, d)$ dan zal de vloeistof niet gaan stromen: de maximale schuifspanning $\tau_{\max} = \tau(d) = \rho g d/2 < \tau_0$.

Indien de vergelijking wel een oplossing $x_* \in (d/2, d)$ heeft dan wordt het snelheidsprofiel op het interval (x_*, d) bepaald door

$$-\tau + \tau_0 = -\mu \frac{\partial w}{\partial x} \quad (5.11)$$

waaruit volgt

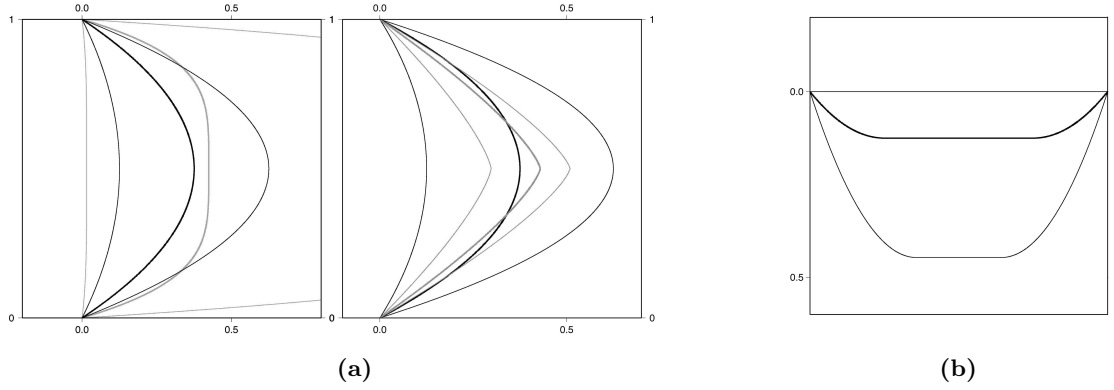
$$w(x) = \frac{\rho g}{2\mu} (x^2 - dx) - \tau_0 (x - d)/\mu. \quad (5.12)$$

Het stromings- en schuifspanningspatroon is geschetst in Figuur 5.11b. Het gedrag van een Bingham vloeistof lijkt enigszins op die van een pseudoplastische vloeistof, bijvoorbeeld de vloeistof stroomt er in een prop uit.

5.4 Lineaire visco-elastische vloeistof

Hoewel het model van de gegeneraliseerde Newtoniaanse vloeistof erg waardevol is voor toepassing in stromingen waar grote deformaties optreden, is het formeel alleen toepasbaar op stationaire afschuifstromingen. Het reologische model is niet in staat om een tijdafhankelijke effecten, zoals een elastische respons, te beschrijven. In deze paragraaf wordt een reologisch model behandeld dat enkele temporele effecten kan beschrijven; het is echter alleen toepasbaar voor stromingen waarin kleine deformaties optreden. Dit is het model van de visco-elastische vloeistof.

Als we een ring van rubber strekken en het daarna loslaten, zal het rubber na een korte tijd terugkeren in de oorspronkelijke toestand. Het rubber is elastisch en kan de oorspronkelijke toestand goed 'herinneren'. Polymeeroplossingen hebben ook elastische- en geheugen-eigenschappen,



Figuur 5.11: (a) Snelheidsprofielen voor een vlakke stroming tussen twee stilstaande platen. Voor beide figuren is $H = 1$ en $\alpha = (-1, -3, -5)$, en in alle gevallen is $m = 1$. De zwarte lijnen in beide figuren geven de stroming weer voor een Newtoniaanse vloeistof ($n = 1$). De grijze lijnen geven de stroming weer voor respectievelijk $n = 1/3$ en $n = 3$. (b) Snelheidsprofielen voor een Bingham vloeistof stroming tussen twee stilstaande platen. Voor deze figuur zijn de volgende parameters gekozen: $d = 1$, $m = 1$, $\tau_0 = 1$ en $\alpha = (-1, -3, -5)$.

Een simpel model om deze elastische- en geheugen-eigenschappen te beschrijven is het Maxwell-model. Beschouwen we de spanning in een materiaal dat vrij kan bewegen tussen twee horizontale platen dan vinden we voor een Newtoniaanse vloeistof

$$\tau_{13} = -\mu \frac{\partial u}{\partial z} = -\mu \dot{\gamma}(t). \quad (5.13)$$

Anderzijds geldt voor een elastische vaste stof de wet van Hooke. Deze wet stelt dat bij een elastische medium de kracht lineair toeneemt met de vervorming, net als bij een veer. Voor deze eenvoudige geometrie luidt de wet van Hooke

$$\tau_{13} = -\mathcal{G} \frac{\partial a}{\partial z},$$

waarin $\mathcal{G}$ de glijdingsmodulus van het materiaal is en a de uitwijking in de x -richting ten opzichte van een evenwichtstoestand op $t = t_0$, $a = \int_{t_0}^t u(z) dt$. Uit deze relatie volgt voor de gradiënt van a in de z -richting:

$$\begin{aligned} \frac{\partial a}{\partial z} &= \frac{\partial}{\partial z} \int_{t_0}^t u(z) dt = \int_{t_0}^t \frac{\partial u}{\partial z} dt \equiv \\ &\equiv \int_{t_0}^t \dot{\gamma}(t) dt \equiv \gamma(t, t_0), \end{aligned}$$

zodat

$$\tau_{13} = -\mathcal{G} \gamma(t, t_0). \quad (5.14)$$

We hebben hier gebruikt dat γ de (hoek)vervorming is (merk op dat $\dot{\gamma}(t) = \partial \gamma / \partial t$).

Het ‘Maxwell-model’ is een lineaire combinatie van de vergelijkingen (5.13) en (5.14):

$$\tau_{13} + \frac{\mu}{\mathcal{G}} \frac{\partial \tau_{13}}{\partial t} = -\mu \dot{\gamma}(t) \quad (5.15)$$

In het stationaire geval reduceert (5.15) tot (5.13). Voor snel veranderende spanningen domineert de tijdsafgeleide in het linkerlid en (na integratie) volgt (5.14). Dus (5.15) modelleert een vloeistof met zowel visceuze als elastische eigenschappen.

We stellen nu $\eta_0 = \mu$ en $\lambda_0 = \mu / \mathcal{G}$ (λ_0 is hiermee een tijdconstante) en schrijven (5.15) als

$$\tau + \lambda_0 \frac{\partial \tau}{\partial t} = -\eta_0 \dot{\gamma}(t),$$

een eerste orde differentiaalvergelijking in t die na integratie

$$\tau(t) = - \int_{-\infty}^t \left(\frac{\eta_0}{\lambda_0} e^{[-(t-s)/\lambda_0]} \right) \dot{\gamma}(s) ds$$

oplevert. De uitdrukking tussen accolades is de *relaxatiemodulus* $G(t-s)$. Partiële integratie geeft:

$$\tau(t) = \int_{-\infty}^t \left(\frac{\eta_0}{\lambda_0^2} e^{[-(t-s)/\lambda_0]} \right) \gamma(t, s) ds,$$

waarin de term tussen accolades bekend staat als de *geheugenfunctie* $M(t-s)$. Hierbij is verondersteld dat τ eindig is voor $t \rightarrow -\infty$.

De gegeneraliseerde lineaire visco-elastische vloeistof wordt voorgesteld door

$$\tau_{ij} = - \int_{-\infty}^t G(t-s) \dot{\gamma}_{ij}(s) ds \quad (5.16)$$

of

$$\tau_{ij} = \int_{-\infty}^t M(t-s) \gamma_{ij}(t, s) \, ds$$

waarvan het Maxwell-model een speciaal geval is.

Het reologisch model (5.16) is bruikbaar voor afschuifstromingen, rekstromingen en elk ander type stroming zolang de deformaties ten opzichte van de referentietoestand klein zijn. Het is het correcte startpunt voor de beschouwing van niet-lineaire effecten. Tot slot behandelen we twee voorbeelden met betrekking tot dit algemene model.

5.4.1 Stationaire afschuifstroming

Als een vloeistof een lange tijd tussen twee platen heeft gestroomd met afschuifsneldheid $\dot{\gamma}_{13}$ constant, dan wordt (5.16)

$$\begin{aligned} \tau_{13} &= - \int_{-\infty}^t G(t-s) \dot{\gamma}_{13} \, ds \\ &= -\dot{\gamma}_{13} \int_0^{\infty} G(\sigma) \, d\sigma = -\eta_0 \dot{\gamma}_{13} \end{aligned}$$

Hieruit zien we dat de viscositeit η_0 gelijk is aan de integraal over de relaxatiemodulus. Via het model van de lineaire visco-elastische vloeistof vinden we in dit geval alleen de viscositeit voor kleine afschuifsnelheden.

5.4.2 Terugspringen van een vloeistof

Beschouw weer een vloeistof tussen twee horizontale platen die een stationaire afschuifstroming ondergaat tot $t = 0$ met constante afschuifsneldheid $\dot{\gamma}$ (Figuur 5.12). Op $t = 0$ wordt de spanning opgeheven en springt de vloeistof terug. We willen de vervorming $\gamma(0, t)$ volgen als functie van de tijd. Door de afstand tussen de platen klein genoeg te kiezen blijft gedurende het terugspringen het lineaire snelheidsprofiel gehandhaafd (inertie is niet belangrijk). Laat γ_{∞} de uiteindelijke vervorming zijn, d.w.z.

$$\gamma_{\infty} = \lim_{t \rightarrow \infty} \gamma(0, t) = \int_0^{\infty} \dot{\gamma}(s) \, ds. \quad (5.17)$$

We bepalen γ_{∞} met (5.16) voor $t > 0$. Uit $\tau(t) = 0$ volgt:

$$0 = - \int_{-\infty}^0 G(t-s) \dot{\gamma}_0 \, ds - \int_0^t G(t-s) \dot{\gamma}(s) \, ds$$

of met $\sigma = t - s$

$$0 = -\dot{\gamma}_0 \int_t^{\infty} G(\sigma) \, d\sigma - \int_0^t G(\sigma) \dot{\gamma}(t-\sigma) \, d\sigma \quad (5.18)$$

Laat nu $G_n = \int_0^{\infty} G(\sigma) \sigma^n \, d\sigma$ dan volgt

$$-\dot{\gamma}_0 G_0 + \dot{\gamma}_0 \int_0^t G(\sigma) \, d\sigma = \int_0^t G(\sigma) \dot{\gamma}(t-\sigma) \, d\sigma.$$

Voer de Laplace getransformeerden $\bar{G}(p) = \mathcal{L}\{G(t)\}$ en $\bar{g}(p) = \mathcal{L}\{\dot{\gamma}(t)\}$ in. Transformatie van bovenstaande vergelijking leidt tot (zie sectie 6.2.1)

$$-\frac{\dot{\gamma}_0 G_0}{p} + \frac{\dot{\gamma}_0 \bar{G}(p)}{p} = \bar{G}(p) \bar{g}(p)$$

en dus

$$\bar{g}(p) = \frac{1}{p} \left(\dot{\gamma}_0 - \frac{\dot{\gamma}_0 G_0}{\bar{G}(p)} \right).$$

We ontwikkelen $\bar{G}(p)$ in een Taylor reeks,

$$\bar{G}(p) = G_0 - G_1 p + \mathcal{O}(p^2)$$

zodat

$$\bar{g}(p) = \dot{\gamma}_0 \left(\frac{G_1}{G_0 + G_1(p)} + \mathcal{O}(p^2) \right).$$

Uit (5.17) vinden we

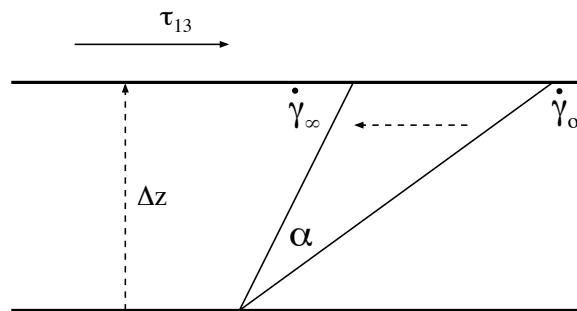
$$\gamma_{\infty} = \lim_{p \rightarrow 0} p \mathcal{L} \left\{ \int_0^t \dot{\gamma}(s) \, ds \right\} = \lim_{p \rightarrow 0} \bar{g}(p),$$

zodat tenslotte

$$\gamma_{\infty} = \lim_{p \rightarrow 0} \bar{g}(p) = -\dot{\gamma}_0 \frac{G_1}{G_0}.$$

Op deze manier hebben we de integraalvergelijking (5.18) voor $\dot{\gamma}$ niet expliciet opgelost, maar de uiteindelijke vervorming als integraal via deze integraalvergelijking berekend. Men kan deze uiteindelijke vervorming expliciet uitrekenen door een uitdrukking voor de relaxatiemodulus te nemen, bijvoorbeeld die van het Maxwell-model met als resultaat $\gamma_{\infty} = -\dot{\gamma}_0 \lambda_0$.

Als we het model van een lineaire visco-elastische vloeistof proberen toe te passen op stromingen waar de deformaties niet klein zijn, komen we in moeilijkheden. Er is dan namelijk een afhankelijkheid van zowel de spanning als de rotatie van een vloeistofdeeltje in de stroming, dat wil zeggen, het model is niet objectief. Meer algemene modellen beschouwen dan ook de spanning in een coördinatenstelsel dat meeroteert met de stroming.



Figuur 5.12: *Horizontale stroming met constant snelheidsprofiel.*

Hoofdstuk 6

Warmtetransport

Na het uitstapje voor niet-Newtonaanse vloeistoffen in Hoofdstuk 5, keren we terug naar Newtonaanse vloeistoffen.

Voor veel geofysische stromingen is warmtetransport een essentieel en aansturend proces. Toch komt uit de set vergelijkingen voor een Newtonaanse vloeistof misschien niet meteen direct duidelijk naar voren hoe deze koppeling van warmte ($= T$) naar impuls ($\vec{u}$) tot stand komt. De relevante vergelijkingen zijn de Navier-Stokes vergelijking (2.22), massabehoud (2.12), energiebehoud (2.29) en de toestandsvergelijkingen voor gassen (2.30) of vloeistoffen (2.31).

Figuur 6.1 schetst de samenhang tussen deze set vergelijkingen. De stroming, beschreven door de impulsvergelijking, vervoert warmte en impuls, en beïnvloedt door de impulsadvectie direct zichzelf. Warmtediffusie kan warmte ook herverdelen, maar is vaak veel minder van belang dan de warmteadvectie door de stroming. Verwarming door momentumdissipatie is bijna altijd onbelangrijk. De koppeling van de temperatuurverdeling met de stroming gaat via het advectieve warmtetransport.

De koppeling van de warmteverdeling op de impulsvergelijking is indirecter. Verschillen in temperatuur veroorzaken verschillen in dichtheid – beschreven door de toestandsvergelijking. Deze verschillen in dichtheid, met andere woorden, in buoyancy, veroorzaken drukverschillen die de stroming beïnvloeden. Hiervoor is wel de zwaartekracht als externe kracht nodig, anders is het effect van dichtheidsverschillen op de stroming kleiner.

Elk systeem neigt naar de staat met de hoogste entropie, dus een zo gelijk mogelijke impuls en

warmte verdeling. Omdat bijna elk systeem begrensd is, betekent dat de stroming tot rust wil komen. Er is daarom ook een externe forcering nodig om de stroming in stand te houden. Dit kan een externe drukgradiënt zijn, zoals bij een stroming in een pijp (sectie 4.2.1). Een andere externe forcering is de zwaartekracht, zoals bij de ‘falling film’ (sectie 4.2.2). Een derde, en belangrijke forcering is differentiële verwarming, zoals bijvoorbeeld bij de aarde of atmosferische convectie het geval is.

6.1 De temperatuurvergelijking

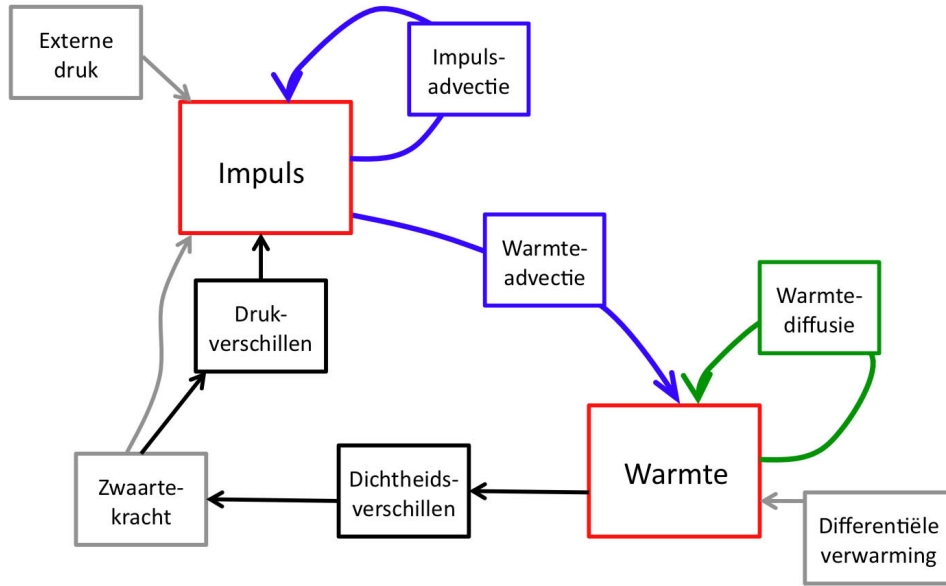
In sectie 2.6 is de vergelijking voor het behoud van interne energie (e) afgeleid (vergelijking (2.27)). Omdat interne energie niet een grootte is die zich makkelijk laat interpreteren, is e met vergelijking (2.24) al omgeschreven tot de temperatuur (T , vergelijking (2.29)). In deze vergelijking is het molculaire warmtetransport ($\vec{q}$) nog open gelaten. Hiervoor nemen we aan dat deze zich lineair gedraagt. Dit betekent dat de warmteflux evenredig is met de temperatuurgradiënt, dus

$$\vec{q} = -k\nabla T, \quad (6.1)$$

waarin k warmtegeleidingscoëfficiënt ($\text{W}/(\text{mK})$) is.

Als we ook nog de mogelijkheid voor bronnen/putten of interne energie (Q , W/m^3) openhouden, dan wordt vergelijking (2.29)

$$\rho c_v \frac{dT}{dt} = \epsilon - p\nabla \cdot \vec{u} + \nabla \cdot (-k\nabla T) + Q. \quad (6.2)$$



Figuur 6.1: Schets van de interactie tussen impuls (=stroming) en warmte (=temperatuur) van een vloeistof. In blauw en groen staan de processen direct gestuurd door respectievelijk de stroming en temperatuur. In grijs staan de processen die een externe forcering aan de stroming kunnen geven. (Zie de digitale versie van dit dictaat op Blackboard voor een kleurenversie van deze schets.)

Bronnen of putten van interne energie kunnen bijvoorbeeld zijn emissie of absorptie van langgolvlige straling, absorptie van kortgolvlige straling en condensatie of verdamping in wolken.

Laplace transformatie, de Fourier transformatie en scheiding van variabelen. We bespreken in dit dictaat alledrie.

6.2 Warmtetransport door conductie

We zullen eerst ingaan op een bewegingsloze vloeistof. We laten interne warmteproductie Q buiten beschouwing. Zonder stroming vindt het transport van warmte alleen plaats door middel van moleculaire diffusie. Dan volgt uit (6.2):

$$\rho c_v \frac{\partial T}{\partial t} = \nabla \cdot (k \nabla T).$$

In vele gevallen (waaronder vaste stoffen) kunnen ρ , c_v en k als constanten worden beschouwd. In dit geval is de thermische diffusiecoëfficiënt $\kappa = k/(\rho c_v)$ constant, zodat de bovenstaand vergelijking vereenvoudigd tot

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \kappa \nabla^2 T. \quad (6.3)$$

Deze vergelijking kan met geschikte rand- en beginvoorwaarden worden opgelost. Als voorbeelden geven we drie veel gebruikte methoden: de

6.2.1 De Laplace transformatie

Bij de Laplace transformatie integreren we over de tijd. Bij de Laplace transformatie gebruiken we, voor reële $s > 0$, de integraal

$$F(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t) dt.$$

De functie $F(s)$ is gedefinieerd voor die waarden van s waarvoor de integraal bestaat en heet de ‘Laplace getransformeerde’ van f , ook wel aangeduid als $\mathcal{L}(f)$. Waar de originele functie f afhankelijk is van de tijd (t), is de $\mathcal{L}(f)$ afhankelijk van s .

De Laplace transformatie is een lineaire transformatie, dat wil zeggen voor twee functies, f_1 en f_2 , geldt

$$\mathcal{L}(c_1 f_1 + c_2 f_2) = c_1 \mathcal{L} f_1 + c_2 \mathcal{L} f_2.$$

Een aantal rekenregels kan relatief gemakkelijk worden afgeleid. We definiëren $F(s)$ als $F(s) =$

$\mathcal{L}\{f(t)\}$; a is een reëel getal.

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{f(at)\} &= a^{-1}F(sa^{-1}), \quad \text{voor } a > 0 \\ \mathcal{L}\{e^{-at}f(t)\} &= F(s+a) \\ \mathcal{L}\{f'(t)\} &= sF(s) - f(+0) \\ \mathcal{L}\{f^{(n)}(t)\} &= s^n F(s) - s^{n-1}f(+0) - \dots \\ &\quad \dots - sf^{(n-2)}(+0) - f^{(n-1)}(+0)\end{aligned}$$

waarbij $f(+0) = \lim_{t \downarrow 0} f(t)$.

Een laatste belangrijke regel betreft de Laplace getransformeerde van het convolutie product $f * g$, gedefiniëerd voor $t > 0$, door

$$f * g = \int_0^t f(\tau)g(t-\tau) d\tau,$$

met de eigenschap

$$\mathcal{L}\{f * g(t)\} = F(s)G(s)$$

waarbij $G(s) = \mathcal{L}\{g(t)\}$. In de Appendix (sectie A.4.1) zijn een aantal veel voorkomende functies en hun Laplace getransformeerde gepresenteerd.

De belangrijkste toepassing van de Laplace transformatie vinden we bij het oplossen van beginwaarde problemen voor lineaire differentiaalvergelijkingen met constante coëfficiënten, zoals bijvoorbeeld (6.3). De objecten mogen begrensd zijn, dus hoeven niet oneindig lang te zijn.

6.2.2 Warmtegeleiding in een half-oneindige staaf

Een voorbeeld van een probleem waarbij de Laplace transformatie kan helpen bij het vinden van de oplossing is een stapsgewijze temperatuurverandering in een half-oneindige staaf.

Beschouw een half-oneindig dikke staaf, die op $t = 0$ een temperatuur T_0 heeft, terwijl bij $x = 0$ voor $t > 0$ de temperatuur een constante waarde T_1 heeft ($T_1 \neq T_0$). Als we bovendien aannemen dat de staaf uit homogeen materiaal bestaat en dat deze geen warmte verliest aan de omgeving, wordt de formulering van het probleem gegeven door (6.3):

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \kappa \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}, \quad (6.4)$$

met begin- en randvoorwaarden:

$$\begin{aligned}T(x, 0) &= T_0 \quad (x > 0) & \text{voor } t = 0, \\ T(0, t) &= T_1 \quad (t > 0) & \text{voor } x = 0 \text{ en} \\ T(x, t) &< \infty & \text{voor } x \rightarrow \infty.\end{aligned}$$

De Laplace getransformeerde, $\Theta(s, x)$, van $T(t, x)$ is

$$\Theta(s, x) = \int_0^\infty e^{-st} T(t, x) dt.$$

Met behulp van de rekenregels vinden we dat vergelijking (6.4) transformeert tot

$$\kappa \frac{\partial^2 \Theta}{\partial x^2} = s\Theta - T_0.$$

De oplossing van deze gewone differentiaalvergelijking is, (T_0 is constant)

$$\Theta(s, x) = A(s)e^{-x\sqrt{s/\kappa}} + B(s)e^{x\sqrt{s/\kappa}} + \frac{T_0}{s}$$

Uit de derde randvoorwaarde volgt $B(s) = 0$, want anders is $\Theta(s, x \rightarrow \infty)$ niet begrensd. De eerste randvoorwaarde is al verwerkt in de term T_0/s . De tweede randvoorwaarde is getransformeerd $\Theta(s, 0) = T_1/s$ - de getransformeerde van een getal is dit getal gedeeld door s , zie Appendix A.4.1. Als we deze tweede randvoorwaarde toepassen dan vinden we dat $A(s) = (T_1 - T_0)s^{-1}$. De oplossing van dit probleem is dus

$$\Theta(s, x) = (T_1 - T_0)s^{-1} \exp\{-x(s/\kappa)^{1/2}\} + T_0s^{-1}.$$

Terugtransformatie geeft (zie opnieuw de Appendix)

$$T(t, x) = (T_1 - T_0) \operatorname{Erfc}\left(\frac{x}{\sqrt{4\kappa t}}\right) + T_0. \quad (6.5)$$

De complementaire errorfunctie $\operatorname{Erfc}(x)$ gedefiniëerd als

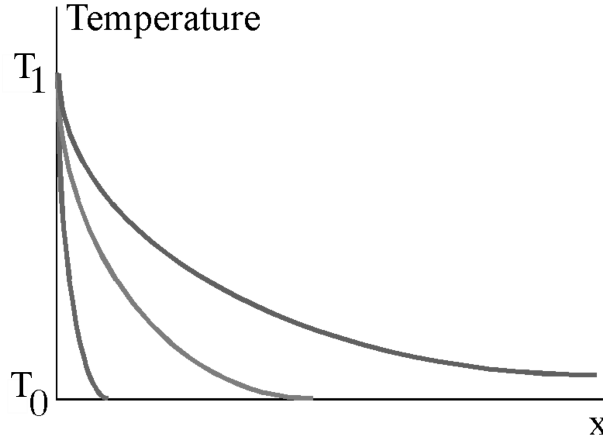
$$\begin{aligned}\operatorname{Erfc}(x) &= 1 - \operatorname{Erf}(x) \\ &= 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-z^2} dz,\end{aligned}$$

met $\operatorname{Erf}(\infty) = \operatorname{Erfc}(0) = 1$. Voor $T_1 > T_0$ is het temperatuurverloop als functie van x geschetst in Figuur 6.2 voor verschillende waarden van t .

De warmteflux wordt gegeven door vergelijking (6.1); toegespitst voor $x = 0$ op tijdstip $t > 0$ wordt dit

$$q(t) = -\rho c_v \kappa \left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_{x=0} \quad (6.6)$$

Het is makkelijker om q te bepalen met behulp van transformatie dan door differentiatie van de



Figuur 6.2: Temperatuurverloop bij drie verschillende tijdstippen als functie van de afstand tot de wand.

oplossing van T . We gebruiken $Q(s)$ als $\mathcal{L}\{q(t)\} = Q(s)$, dan volgt

$$\begin{aligned} Q(s) &= -\rho c_v \kappa \mathcal{L} \left\{ \left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_{x=0} \right\} \\ &= -\rho c_v \kappa \left. \frac{\partial \Theta}{\partial x} \right|_{x=0} \\ &= \rho c_v \kappa A(s) \sqrt{s/\kappa} \\ &= \rho c_v (T_1 - T_0) \sqrt{\kappa/s} \end{aligned}$$

Na terugtransformatie (zie Appendix) volgt dat

$$q(t) = \rho c_v (T_1 - T_0) \sqrt{\frac{\kappa}{\pi t}}. \quad (6.7)$$

Een maat voor het interval op de x -as waarover de verandering van temperatuur op $x = 0$ merkbaar is, is de penetratiediepte of indringdiepte δ . De indringdiepte is gedefiniëerd als het snijpunt van de raaklijn aan het temperatuurprofiel op $x = 0$ met de lijn $T = T_0$ (zie Figuur 6.3). Dit snijpunt heeft x -coördinaat $\delta = (T_1 - T_0)k/q(t) = \sqrt{\kappa \pi t}$.

Als ook al te zien is in de oplossing voor T (vergelijking (6.5)) door het 4 keer zo lang om de staaf 2 keer zo ver dezelfde temperatuur te laten krijgen. De temperatuurveranderingen in de staaf gaan dus in het begin snel, daarna steeds langzamer.

6.2.3 De Fourier transformatie

We definiëren de Fourier getransformeerde $\mathcal{F}(f)$ van f als

$$\mathcal{F}\{f(x)\} = \hat{f}(k) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ikx} dx,$$

met de inverse transformatie:

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(k) e^{ikx} dk.$$

Net als de Laplace transformatie is de Fourier transformatie lineair. Verder heeft de Fourier transformatie onder meer de eigenschappen:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\{f^{(n)}(x)\} &= (ik)^n \hat{f}(k) \\ \mathcal{F}\{x^n f(x)\} &= i^n \hat{f}^{(n)}(k) \\ \mathcal{F}\{f(x) * g(x)\} &= \hat{f}(k) \hat{g}(k) \\ \mathcal{F}\{f(bx)e^{iax}\} &= b^{-1} \hat{f}(b^{-1}(k-a)) \end{aligned}$$

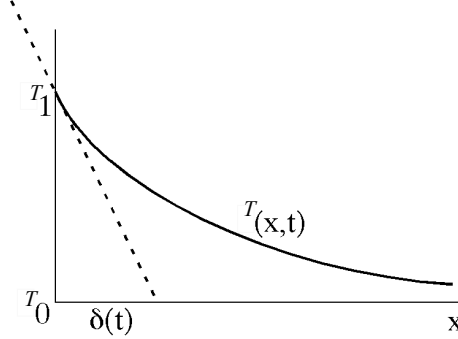
Het convolutieproduct $f * g$ is gedefiniëerd door

$$f(x) * g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(u)g(x-u)du. \quad (6.8)$$

Waar de Laplace transformatie tijdsafgeleiden kan verwijderen - het is een integraal van 0 tot ∞ - kan de Fourier transformatie alleen (makkelijk) toegepast worden over oneindige objecten. Bij de Fourier transformatie integreren we namelijk van $-\infty$ tot ∞ .

6.2.4 Warmtegeleiding in een onbegrensd medium

Ook van de Fourier transformatie zullen we een toepassing geven. Beschouw de warmtegeleiding door een onbegrensd medium ($x \in (-\infty, \infty)$) als gevolg van de beginverdeling $T_0(x)$, dus $t \in$



Figuur 6.3: Definitie van de indringdiepte δ .

$[0, \infty)$. De relevante vergelijking is vergelijking (6.4):

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \kappa \frac{\partial^2 T}{\partial x^2},$$

met de rand- en beginvoorwaarden

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} T(x, t) = 0$$

$$T(x, 0) = T_0(x).$$

We definiëren de Fourier getransformeerde van T als $\hat{T}(t, k)$ met

$$\mathcal{F}\{T(x, t)\} = \hat{T}(k, t) = \int_{-\infty}^{\infty} T(x, t) e^{-ikx} dx.$$

Als we vergelijking (6.4) Fourier transformeren (over x) dan vinden we de vergelijking

$$\frac{\partial \hat{T}}{\partial t} = -k^2 \kappa \hat{T}.$$

Deze vergelijking heeft als algemene oplossing

$$\hat{T}(k, t) = A(k) e^{-k^2 \kappa t}.$$

De coëfficiënten $A(k)$ volgen uit de beginvoorwaarde voor $t = 0$,

$$A(k) = \hat{T}_0(k) = \int_{-\infty}^{\infty} T_0(x) e^{-ikx} dx.$$

De algemene oplossing volgt nu door de inverse transformatie toe te passen op de gevonden (algemene) oplossing:

$$T(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{T}_0(k) e^{-k^2 \kappa t} e^{ikx} dk.$$

Een concreet probleem waar deze oplossing voor gebruikt kan worden, is instantane verwarming op $x = 0$ met een bepaalde hoeveelheid energie ($= Q$). De geïdealiseerde voorstelling is dat op $t = 0$ de hele staaf, behalve $x = 0$, is uniform van temperatuur. We nemen deze temperatuur als 0 omdat dit voor de Fourier transformatie van T_0 veel makkelijker is. De temperatuurverdeling voor de staaf, inclusief $x = 0$, wordt gegeven door

$$T_0(x) = \frac{Q}{\rho c_p} \delta(x).$$

Hierin is $\delta(x)$ de Dirac delta¹. Deze functie is 0 voor $x \neq 0$, oneindig voor $x = 0$, maar de integraal over $x \in (-\infty, \infty)$ van $\delta(x) = 1$.

De Fourier getransformeerde van T_0 is $\hat{T}_0(k) = \frac{Q}{\rho c_p}$ (Appendix A.4.2), zodat we na transformatie van $\hat{T}$, T kunnen beschrijven met

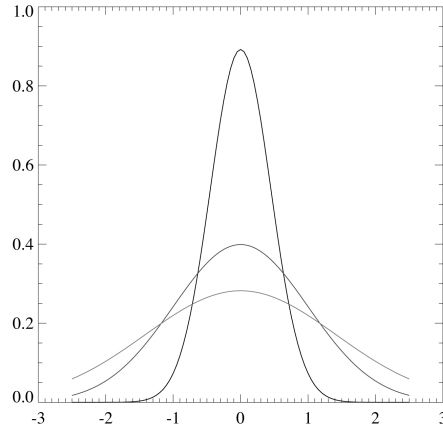
$$T(x, t) = \frac{Q}{\rho c_p} \frac{1}{\sqrt{4\pi\kappa t}} e^{-x^2/(4\kappa t)}.$$

De oplossing voor een paar willekeurige tijdstippen is geschetst in Figuur 6.4.

Het meer algemene probleem met $T_0(x)$ willekeurig kan worden opgelost door superpositie; de oplossing is dan

$$T(x, t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi\kappa t}} \int_{-\infty}^{\infty} T_0(\xi) e^{-(x-\xi)^2/(4\kappa t)} d\xi. \quad (6.9)$$

¹De Kronecker delta is de discrete variant van de Dirac delta. Om die reden is de notatie (δ) ook gelijk.



Figuur 6.4: Diffusie van warmte vanuit een puntbron. De drie curves corresponderen met de tijdstippen $t = 0.1, 0.5$ en 1.0 .

6.2.5 Scheiding van variabelen

De Laplace transformatie werkt vooral bij eenvoudige randvoorwaarden in de ‘tijd-ruimte’. Bijvoorbeeld, de half-oneindige staaf heeft een constante temperatuur aan het uiteinde. Het probleem van de warmtediffusie vanuit een puntbron (sectie 6.2.4) heeft geen randvoorwaarde in de tijd en is daarom niet met Laplace transformatie op te lossen. Een Fourier transformatie eist echter dat het probleem oneindig in de ruimte is, en dat geldt natuurlijk niet voor alle problemen.

Ruimtelijk niet-oneindig problemen met tijdsvariërende randvoorwaarden kunnen dus niet makkelijk met een van beide transformaties worden aangepakt. Echter, als de randvoorwaarden periodiek in de tijd zijn, dan kan scheiding van variabelen een oplossing geven. De aanname is dat de oplossing het product is van twee functies, waar de ene functie afhangt van de ruimte en de andere van de tijd, dus

$$T(x, t) = C f(t) g(x). \quad (6.10)$$

We gaan hier uit van een 1 dimensionaal probleem. Voor meer dimensies wordt dit alles navenant complexer. Als we deze ‘oplossingsfamilie’ in vergelijking (6.4) invullen, dan vinden we de relatie

$$f'(t)g(x) = \kappa f(t)g''(x). \quad (6.11)$$

Als we vervolgens aannemen dat op de rand ($x = 0$) waar de randvoorwaarden gelden, $g(x = 0) = 1$, dan is $f(t)$ vastgelegd door de randvoorwaarden. Met de bovenstaande vergelijking kan dan $g(x)$ worden gevonden.

Omdat vergelijking (6.4) lineair is, kunnen we een som van oplossingen maken. De temperatuur op de rand kan dan beschreven worden met

$$T(0, t) = T_m + \sum_i T_i \cos(\omega_i t + \varphi_i),$$

waarin T_m is de gemiddelde temperatuur aan de rand is en T_i , ω_i en φ_i respectievelijk de amplitude, hoekfrequentie en de fase op $t = 0$ zijn. Voor elke periodieke oplossing i kunnen we de bijbehorende $g(x)$ bepalen.

Nu is dit makkelijker als we gebruik maken van complexe functies, en na afloop daar het reële deel van nemen, dan direct met volledig reële functies te werken. We gebruiken daarom voor $f(t) = T_0 e^{i\omega t}$ en $g(x) = e^{bx}$, waarbij b een complex getal is. Als we deze functie ($T(x, t) = T_0 e^{i\omega t} e^{bx}$) invullen in vergelijking (6.11), dan vinden we

$$T_0 i\omega f(t)g(x) = T_0 \kappa b^2 f(t)g(x),$$

wat de b vastlegt met

$$b^2 = \frac{i\omega}{\kappa} \rightarrow b = \pm(1+i)\sqrt{\frac{\omega}{2\kappa}}.$$

We veronderstellen dat het probleem het positieve gedeelte van de x -as ($x \in [0, \infty)$) bestrijkt. Verder moet gelden dat $T(x \rightarrow \infty, t) < \infty$, dan voldoet voor $x \in [0, \infty)$ de oplossing met een positief reëel deel niet. Bij de oplossing van b met een positief reëel deel gaat $g(x) = e^{(1+i)\sqrt{\omega/(2\kappa)}x}$ naar oneindig voor $x \rightarrow \infty$. De complexe oplossing van vergelijking (6.11) is

$$T(x, t) = T_0 e^{-\sqrt{\omega/(2\kappa)}x} e^{i(\omega t - \sqrt{\omega/(2\kappa)}x)}.$$

Als we dit weer vertalen naar een reële oplossing, we vinden de volgende som van functies

$$T(x, t) = T_m + \sum_i T_i e^{-\sqrt{\omega_i/(2\kappa)} x} \cos(\omega_i t + \varphi_i - \sqrt{\frac{\omega_i}{2\kappa}} x). \quad (6.12)$$

6.2.6 Warmte diffusie in sneeuw

Een typisch fysisch probleem waar we scheiding van variabelen kunnen gebruiken, is de warmte diffusie in sneeuw. Als we veronderstellen dat de temperatuur aan het oppervlak wordt geforceerd door de atmosfeer op verschillende tijdschalen - dagcyclus, jaarcyclus, klimaatcyclus - dan kunnen we voor al die signalen hun penetratie in het sneeuw pakket berekenen. We gebruiken hier, voor een makkelijke oriëntatie, de z -as met het oppervlak op $z = 0$ en $z \in \langle -, 0 \rangle$. Vergelijking (6.12) wordt dan

$$T(z, t) = T_m + \sum_i T_i e^{\sqrt{\omega_i/(2\kappa)} z} \cos(\omega_i t + \varphi_i + \sqrt{\frac{\omega_i}{2\kappa}} z).$$

Figuur 6.5 schetst hoe de seizoenscyclus het sneeuw pakket indringt. Voor de dagelijkse gang of klimaatcyclus is dit patroon niet wezenlijk anders, alleen de diepte waarop het signaal verloren gaat en het faseverschil zijn anders. In Tabel 6.1 staan deze waarde opgesomt. Deze getallen zijn uitgerekend met een typische waarde voor diffusiviteit van warmte in sneeuw ($\kappa = 5.4 \cdot 10^{-7} \text{ m}^2/\text{s}$). Snelle veranderingen dringen dus nauwelijks het sneeuw pakket in, terwijl zeer langzame signalen lang bewaard blijven in het sneeuw (en ijs) pakket. We kunnen inderdaad nog aan het temperatuurprofiel van het ijs op Antarctica zien dat het ruim 10.000 jaar geleden veel kouder was op Antarctica.

Als je de ‘fasediepte’ in tabel vergelijkt met het lokale maxima in Figuur 6.5 dat deze niet overeen komen. De hoogste sneeuw temperatuur vindt in midden in de winter niet op ruim 7 meter diepte, maar op 5.5 meter diepte. Het punt van een temperatuur maximum (dus $\delta T/\delta z = 0$) is dus niet gelijk aan het punt waar de temperatuurcyclus is precies in anti-fase. Dit komt omdat het een gedempte golf is.

²De wet van Stefan-Boltzmann kan worden afgeleid uit de wet van Planck door deze over alle frequenties en een halve bol te integreren. σ is daarom ook gelijk aan

$$\sigma = \frac{2\pi^5 k^4}{15c^2 h^3}.$$

6.3 Warmtetransport door straling

Energietransport door straling wordt behandeld in verschillende andere vakken, daarom gaan we tijdens dit college er niet in detail op in. Een paar zaken zijn wel relevant om even in herinnering te brengen.

De uitgezonden straling ($B_\lambda(T)$) door een perfecte ‘black body’, als functie van de golflengte λ en temperatuur T wordt gegeven door de wet van Planck:

$$B_\lambda(T) = \frac{2hc^2}{\lambda^5} \frac{1}{e^{\frac{hc}{\lambda k_B T}} - 1}, \quad [\text{W sr}^{-1} \text{ m}^{-3}]$$

hierin is h de Planck constante ($6.626 \cdot 10^{-34} \text{ J s}$), c de lichtsnelheid in het betreffende medium en k_B de Boltzmann constante ($1.38 \cdot 10^{-23} \text{ J K}^{-1}$). Een schets van dit spectrum wordt gegeven in Figuur 6.6. In deze figuur is ook goed te zien dat de golflengte met maximale stralingsintensiteit een functie is van de temperatuur. Deze relatie wordt gegeven door de verschuivingswet van Wien

$$\lambda_{max} = b/T,$$

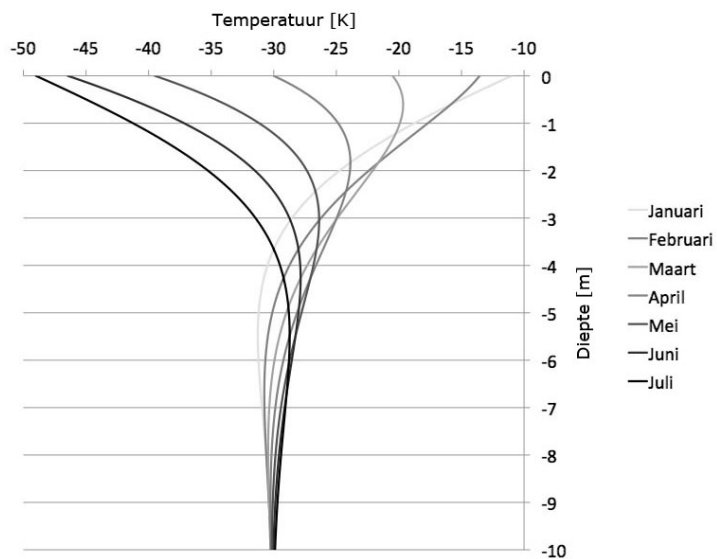
met $b = 2.898 \cdot 10^{-3} \text{ K m}$. Vloeistoffen op een temperatuur relevant voor alledaagse omstandigheden (van 200 tot 400 K) zenden vooral straling uit in het zogenaamde infrarood gedeelte van het spectrum. Bij een temperatuur van 1000 tot 10000 K, zoals het zichtbare gedeelte van de zon, zenden objecten straling uit in golflengtes die we kunnen zien. Bij nog heter objecten verschuift de golflengte waarin met de hoogste stralingsintensiteit wordt uitgezonden naar eerst UV dan röntgenstraling en uiteindelijk gammastraling.

Verder neemt de totaal uitgezonden energie (j^*) toe bij toenemende temperatuur, wat gegeven wordt de wet van Stefan-Boltzmann

$$j^* = \sigma T^4,$$

waarin de Stefan-Boltzmann constante σ gelijk² is aan $5.67 \cdot 10^{-8} \text{ J s}^{-1} \text{ m}^{-2} \text{ K}^{-4}$.

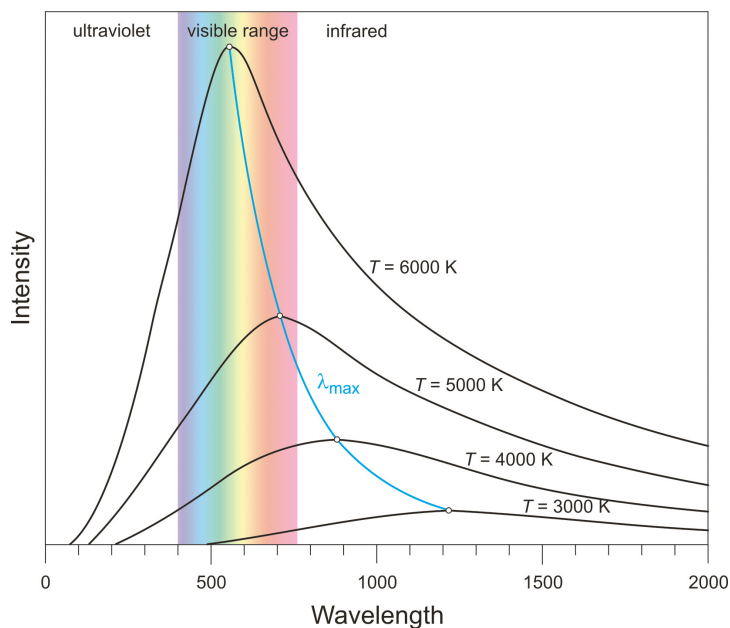
Een ‘black body’ is een perfecte uitzender van straling, dus de spectrale emissiviteit ϵ_λ van dit



Figuur 6.5: Schets van de jaarlijkse gang van de temperatuur het sneeuwpakket binnendringt. De amplitude van het seizoenssignaal neemt exponentieel af, het faseverschil neemt lineair toe.

Tabel 6.1: Warmtediffusie in sneeuw. De indringdiepte is berekend als de diepte waarop de amplitude van het signaal is een factor $1/e$ kleiner dan aan het oppervlak. De 'fasediepte' is de diepte waarop het signaal in anti-fase met het oppervlak.

periode	ω [1/s]	indringdiepte [m]	'fasediepte' [m]
dagcyclus	$7.27 \cdot 10^{-5}$	0.12	0.38
jaarcyclus	$1.99 \cdot 10^{-7}$	2.3	7.3
klimaatcyclus (100.000 jaar)	$1.99 \cdot 10^{-12}$	$0.73 \cdot 10^3$	$2.3 \cdot 10^3$



Figuur 6.6: Schets van het geëmitteerde spectrum van 'black bodies' met verschillende temperatuur.

object is voor alle golflengtes 1. Dat betekent, vanwege Kirchoff's wet die luidt

$$\alpha_\lambda = \epsilon_\lambda,$$

dat een 'black body' ook straling perfect absorbeert want spectrale absorptiviteit α_λ moet voor een 'black body' ook 1 zijn. Binnenin een 'black body' is dus energietransport door straling niet relevant omdat straling zich niet door het medium kan bewegen.

Stralingstransport is relevant voor vloeistoffen zodra deze geen 'black bodies' zijn maar 'gray bodies', dus hun spectrale emissiviteit ϵ_λ ligt tussen 0 en 1. Water heeft een emissiviteit van 1 voor golflengtes in het infra-rode spectrum, dus behalve nabij het wateroppervlak, waar zonlicht het water zou kunnen opwarmen, speelt energietransport door straling geen rol van betekenis. In de atmosfeer, daarentegen, is energietransport door straling een zeer belangrijke factor in het energiebudget. De verschillende componenten van lucht zijn in principe transparant voor straling, tenzij de betreffende golflengte van de straling overeenkomt met een resonantiefrequentie van een lucht-molecuul. Het passerende stralingspakketje kan dus bij de lucht-molecuul de betreffende resonantie opwekken en zo zijn energie overdragen aan het lucht-molecuul. Op die manier kunnen lucht-moleculen straling nabij hun resonantiefrequenties absorberen en emitteren. Uiteindelijk kan dit tamelijk complex gedrag opleveren. Bijvoorbeeld, ozon kan zeer goed UV en nog kortgolvigere straling absorberen, terwijl ozon geen hoge emissiviteit heeft in het infra-rode spectrum. Als gevolg absorbeert ozon in de bovenste lagen van de atmosfeer meer straling dan dat het kan uitzenden. Zodoende is de ozonlaag, waar het UV licht van de zon wordt geabsorbeerd, relatief warm.

6.4 Boussinesq benadering

We hebben tot nu toe gekeken naar warmte c.q. energietransport zonder dat daar vloeistofstroming bij nodig was. Als we opnieuw naar vergelijking (6.2) kijken:

$$\rho c_v \frac{dT}{dt} = \epsilon - p \nabla \cdot \vec{u} + \nabla \cdot (-k \nabla T) + Q,$$

dan zien we dat we dus tot nu toe in dit hoofdstuk de termen $\nabla \cdot (-k \nabla T)$ en Q besproken hebben. Opwarming of afkoeling door compressie of expansie van de vloeistof ($p \nabla \cdot \vec{u}$) verandert wel

de temperatuur maar voegt geen energie aan de vloeistof toe. Er blijft dan nog over om te bespreken opwarming door de conversie van kinetische energie in warmte (ϵ) en advectie van warmte ($\vec{u} \cdot \nabla T$). Voor dat we gaan doen, zullen we eerst een versimpeling op de Navier-Stokes vergelijkingen toepassen: de Boussinesq benadering.

De vergelijkingen die we hadden afgeleid in hoofdstuk 2, (2.12), (2.22), (2.29), (2.30) en (2.31), waren deze:

$$\begin{aligned} \frac{d\rho}{dt} &= -\rho \nabla \cdot \vec{u} \\ \rho \frac{d\vec{u}}{dt} &= -\nabla p + \nabla \cdot \left(2\mu(\mathbf{e} - \frac{1}{3} \text{tr}(\mathbf{e})\mathbf{I}) \right) - \rho g \vec{e}_3 \\ \rho c_v \frac{dT}{dt} &= \epsilon - p \nabla \cdot \vec{u} + \nabla \cdot (k \nabla T) \\ p &= \rho R T \quad \text{of} \quad \rho = \rho_0(1 - \beta(T - T_0)). \end{aligned}$$

waarin we dus de zwaartekracht als enige volumekracht gebruiken.

6.4.1 Hydrostatische balans

Bij zeer veel vloeistofstromingen waarin dichtheidsverschillen een grote invloed hebben op het stromingspatroon, zijn deze dichtheidsverschillen niet erg groot. Voor vloeistoffen zoals water is dat makkelijk te zien, er zijn grote verschillen in temperatuur of zoutconcentratie nodig om een groot dichtheidsverschil te krijgen. Bij gassen lijkt dit niet op te gaan, echter, zolang snelheden veel kleiner zijn dan de geluidssnelheid, zijn dynamische dichtheidsverschillen klein (vergelijk analyse in Frame 3.2). Variaties in de temperatuur zijn ook in zeer veel gevallen een of meer orders kleiner dan de absolute waarde van de temperatuur. Bij gelijke druk zijn de dichtheidsverschillen in lucht dus klein. Het grootste gedeelte van de dichtheid (en druk-) verschillen in lucht worden veroorzaakt door isostatische effecten.

Dit isostatische effect kunnen we isoleren als we naar een stilstaande vloeistof kijken ($\vec{u} = 0$). In dat geval reduceert de momentumvergelijking (2.22) tot

$$\begin{aligned} u, v : \quad 0 &= 0 \\ w : \quad 0 &= -\frac{\partial p}{\partial z} - \rho g, \end{aligned}$$

of in vectornotatie ($\nabla \phi = g \vec{e}_3$, (3.8))

$$\nabla p = -\rho \nabla \phi. \quad (6.13)$$

In een stilstaande vloeistof hangt de druk op een bepaalde locatie dus alleen af van de massa die boven die locatie zit. De druk wordt dan dus enkel bepaald door isostatische effecten, deze benadering van de druk, ook voor de gangbare situatie dat $\vec{u} \neq 0$, heet de hydrostatische druk.

Met deze hydrostatische balans kunnen we ‘nulde’-orde schatting maken van de dichtheid ($\rho_0(z)$) en druk ($p_0(z)$) bij een referentietemperatuur (T_0):³

$$\frac{\partial p_0}{\partial z} = \rho_0 g. \quad (6.14)$$

Voor gassen, relateren we hieraan de dichtheid via de ideale gaswet:

$$\rho_0 = \frac{p_0}{RT_0}.$$

6.4.2 Aannames

De aanname die we gaan maken, is dat de dynamische dichtheidsverschillen klein zijn ten opzichte van deze referentiedruk:

$$\rho(\vec{x}, t) = \rho_0(z) + \rho'(\vec{x}, t), \quad \rho' \ll \rho_0 \quad (6.15)$$

Als we deze expansie invullen in de continuïteitsvergelijking, vinden we

$$\underbrace{\rho_0 (\nabla \cdot \vec{u})}_1 + \underbrace{\rho' (\nabla \cdot \vec{u})}_2 + \underbrace{\left(\frac{\partial \rho'}{\partial t} + \vec{u} \cdot \nabla \rho' \right)}_3 + \underbrace{w \frac{\partial \rho_0}{\partial z}}_4 = 0$$

Voor veel stromingen geldt dat dichtheidsvariaties niet groter en vaak veel kleiner zijn dan relatieve variaties in het snelheidsveld. Dit impliceert dat de termen onder 3 kleiner of gelijk zijn aan de termen onder 2. Deze termen zijn op hun beurt veel kleiner dan de termen onder 1. Dit betekent dat, tenzij er sprake is van grote verticale beweging over grote afstand (term 4), de vloeistof bij zeer goede benadering onsamendrukbaar is, dus

$$\nabla \cdot \vec{u} = 0. \quad (6.16)$$

De voorwaarden waaronder we deze aanname kunnen maken, is al een keer eerder besproken in Frame 3.2.

³In de problemen die we in dit vak beschrijven is de referentietemperatuur een constante. Wanneer problemen in de atmosfeer worden beschreven, is het nuttig om een de gemiddelde verticale temperatuurgradiënt in de referentietemperatuur mee te nemen. In dat geval is T_0 een functie van z .

6.4.3 De Boussinesq vergelijkingen

Als we deze onsamendrukbaarheid in de momentumvergelijking invullen dan reduceert de wrijvingsterm tot $\mu \Delta \vec{u}$ (vergelijk (2.22) en (2.23)). Vullen we vervolgens hierin vergelijking (6.15), dan vinden we

$$(\rho_0 + \rho') \frac{d\vec{u}}{dt} = -\nabla(p_0 + p') + \mu \Delta \vec{u} - (\rho_0 + \rho') g \vec{e}_3$$

waarin p' de dynamische component in de druk is ($p = p_0 + p'$). In deze vergelijking kunnen we de hydrostatische balans (6.14) wegstrepen en op de advectionsterm toepassen dat $\rho_0 \gg \rho'$. Dan vinden we

$$\rho_0 \frac{d\vec{u}}{dt} = -\nabla p' + \mu \Delta \vec{u} - \rho' g \vec{e}_3. \quad (6.17)$$

Het mag misschien vreemd lijken dat dichtheidsvariaties geen effect hebben op de advection, maar wel relevant zijn bij de externe forcing door de zwaartekracht. Dit komt omdat in veel stromingsproblemen de zwaartekracht ordes groter is dan alle andere krachten die op de vloeistof werken.

Dezelfde twee aannames (6.15) en (6.16) kunnen we ook toepassen op de temperatuurvergelijking (2.29). Daarbij nemen we verder ook aan dat er geen bronnen of putten van energie zijn ($Q = 0$) en dat k constant is. We vinden dan

$$\rho_0 c_v \frac{dT}{dt} = \epsilon + k \Delta T. \quad (6.18)$$

Tenslotte kunnen we ook een vergelijking voor de dichtheidsverschillen opstellen. Voor vloeistoffen is dit simpel; voor gassen lineairiseren we de ideale gaswet rond de referentiedruk, dichtheid en temperatuur. In beide gevallen vinden we

$$\rho' = -\beta(T - T_0). \quad (6.19)$$

In de geofysische stromingsleer is nu de volgende stap om de temperatuur als variabele te elimineren door vergelijking (6.19) in te vullen in vergelijking (6.18). Ook wordt verondersteld dat verticale snelheden veel kleiner zijn dan horizontale snelheden. In dat geval kan de vergelijking voor w gereduceerd worden tot de hydrostatische balans (vergelijking (6.13)) en wordt w vastgelegd door de divergentie van het horizontale stroming (vergelijking (6.16)).

Voor dit vak echter is temperatuur een belangrijker grootheid dan dichtheidsverschillen,

daarom elimineren we met vergelijking (6.19) juist ρ' uit vergelijking 6.17 en vinden

$$\rho_0 \frac{d\vec{u}}{dt} = -\nabla p' + \mu \Delta \vec{u} + \beta(T - T_0)g\vec{e}_3. \quad (6.20)$$

Merk op dat het minteken uit de zwaartekrachtsterm is verdwenen. Dit hangt samen met het feit dat warmere vloeistofpakketjes lichter zijn dan hun omgeving en dus een relatief een opwaartse kracht ondervinden. In deze vergelijking is de koppeling tussen de temperatuurverdeling in de vloeistof en de momentumvergelijking, die eerder nog niet zo duidelijk zichtbaar was, expliciet aanwezig via de zwaartekrachtsterm.

6.5 Schalingsanalyse

Voordat we de Boussinesq vergelijkingen kunnen gebruiken voor eenvoudige problemen met een analytische oplossing, moeten we met schaalanalyse achterhalen wanneer deze oplossingen fysisch realistisch zijn. Dit hebben we voor potentiaalstromingen (Hoofdstuk 3) en laminaire (Stokes) stromingen (Hoofdstuk 4) ook gedaan. Voor het overzicht herhalen we eerst de vergelijking die we in het vervolg gaan gebruiken:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \vec{u} &= 0 \\ \rho_0 \frac{d\vec{u}}{dt} &= -\nabla p' + \mu \Delta \vec{u} + \beta(T - T_0)g\vec{e}_3 \\ \rho_0 c_v \frac{dT}{dt} &= k \nabla^2 T + \epsilon. \end{aligned} \quad (6.21)$$

De constanten β [1/K], c_v [J/(kgK)] en k [W/(mK)] zijn de volume expansie coëfficiënt, de warmtecapaciteit en de thermische geleidingscoëfficiënt; $\kappa = k/(c_v \rho_0)$ [m²s⁻¹] is de thermische diffusiecoëfficiënt. We hebben voor het afleiden van deze vergelijking ook aangenomen dat μ en k constant zijn.

Zoals gezegd, om het belang van de verschillende processen die beschreven zijn in deze set vergelijkingen te bekijken, gaan we deze vergelijkingen schalen. We gebruiken hiervoor U en L als een snelheid en een lengte die de stroming globaal karakteriseren, en ΔT als het karakteristiek temperatuurverschil. We nemen aan dat nog steeds geldt dat de tijdschaal van de stroming wordt bepaald door de U en L . Voor de schaling van ϵ gebruiken we vergelijking (2.28). Voor de schaling

van de druk gebruiken we wat voorkennis, we zorgen er namelijk voor dat de drukterm even groot wordt als de advectietermen.

We definiëren met deze aannames de volgende dimensieloze variabelen:

$$\begin{aligned} \tilde{t} &= t \frac{U}{L} & \tilde{T} &= \frac{T - \theta_0}{\Delta T} \\ \tilde{\vec{u}} &= \frac{\vec{u}}{U} & \tilde{p}' &= \frac{p'}{\rho_0 U^2} \\ \tilde{\vec{x}} &= \frac{\vec{x}}{L} & \tilde{\epsilon} &= \epsilon \frac{L^2}{\mu U^2}. \end{aligned}$$

De vergelijkingen van (6.21) worden dan in dimensieloze variabelen - we laten voor het gemak meteen de 'tilde' weer weg:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \vec{u} &= 0 \\ Re \frac{d\vec{u}}{dt} &= -\nabla p' + \nabla^2 \vec{u} + Gr Re^{-1} T \vec{e}_3 \\ Pe \frac{dT}{dt} &= \nabla^2 T + Br \epsilon. \end{aligned}$$

De gebruikte dimensieloze getallen staan in Tabel 6.2.

Er zijn maar weinig stromingen waarbij het Brinkmangetal $Br \geq 1$ is. Veruit in de meeste gevallen geldt dat $Br \ll 1$, zodat visceuze dissipatie te verwaarlozen is. Het Prandtlgetal is een vloeistofeigenschap, dus onafhankelijk van de stroming. Het zegt iets over de relatieve sterkte van transport van impuls en warmte door moleculaire diffusie. Voor gassen is $Pr < 1$, voor water geldt $Pr \cong 7$ en voor kwik, bijvoorbeeld, geldt $Pr \cong 0.025$. Het Pécletgetal geeft de verhouding van convectief transport en transport door diffusie; voor $Pe \gg 1$ is convectie het dominante transportmechanisme, voor $Pe \ll 1$ diffusie.

Stromingen met convectief warmtetransport kunnen grofweg worden verdeeld in drie categorieën; gedwongen convectie, vrije convectie en gemengde convectie. Het kengetal wat hierbij onderscheid maakt is de combinatie $Gr Re^{-1}$. Als $Gr Re^{-1} \ll 1$, dan is de invloed van dichtheidsverschillen door temperatuurverschillen op de stroming verwaarloosbaar. Als ook $Pe \gg 1$, dus convectie is de belangrijkste vorm van warmtetransport, dan is spreken we over gedwongen convectie⁴. In de volgende paragraaf bespreken we een voorbeeld van gedwongen convectie. Als $Gr Re^{-1} \ll 1$ (en $Pe \gg 1$), dan zijn temperatuurverschillen de dominante aandrijvende kracht

⁴Voor het geval dat $Pe \ll 1$ en $Gr Re^{-1} \ll 1$, hebben temperatuurverschillen geen invloed op de stroming en de stroming geen invloed op de temperatuurverdeling. In dat geval zijn temperatuur en momentum ontkoppeld

Tabel 6.2: Enige dimensieloze getallen met hun definities.

	Relatie	Naam	Bedenker
Ra	$\frac{\beta g \Delta T L^3}{\nu \kappa}$	Rayleighgetal	John William Strutt (Lord Rayleigh, 1842-1919)
Re	$\frac{\rho_0 L U}{\mu} = \frac{L U}{\nu}$	Reynoldsgetal	Osborne Reynolds (1842-1912)
Pr	$\frac{\mu}{\rho_0 \kappa}$	Prandtlgetal	Ludwig Prandtl (1875-1952)
Br	$\frac{\mu U^2}{k \Delta T}$	Brinkmangetal	<i>Vernoemd</i> naar Henri Brinkman (1908-1961)
$Péc$	$Pr Re = \frac{L U}{\kappa}$	Pécletgetal	Jean Claude Eugene Péclet (1793-1857)
Gr	$Ra Pr^{-1} = \frac{g \beta \Delta T L^3}{\nu^2}$	Grashofgetal	Franz Grashof (1826-1893)

van de stroming. In dat geval spreken we over vrije convectie. In het hoofdstuk over stabiliteit in het tweede deel van dit dictaat bespreken we een voorbeeld van vrije convectie: Rayleigh-Bérnard convectie. Dit bespreken we dan pas omdat Rayleigh-Bérnard convectie ook een zeer goed voorbeeld is hoe we de stabiliteit van stromingen met behulp van lineaire verstoringen kunnen bepalen.

6.6 Gedwongen convectie

Bij gedwongen convectie zijn de traagheidseffecten veel groter dan Archimedeskrachten ('buoyancy'). De temperatuurverdeling heeft dan geen invloed op het stromingsveld en in dit geval zijn thermodynamica en dynamica ontkoppeld, maar de dynamica is wel van belang voor de thermodynamica. De snelheidsverdeling $\vec{u}$ wordt niet door dichtheidsverschillen beïnvloed. Is $\vec{u}$ bekend, dan kan het temperatuurveld afzonderlijk worden uitgerekend. In het volgende voorbeeld wordt dit geïllustreerd.

6.6.1 Warmtetransport bij gedwongen laminaire pijpstroming

Een constante drukgradiënt (β_p) genereert een stationaire stroming in een cilinder met straal R en lengte $2L$, ($L \gg R$), zie Figuur 6.7 Voor $z < 0$ is de temperatuur aan de wand ($r = R$) gelijk aan

T_0 , voor $z > 0$ neemt deze lineair toe met z en is T_1 op $z = L$. De resulterende stroming wordt parallel verondersteld (eindeffecten verwaarloosd) en het temperatuurprofiel heeft geen invloed op het stromingsprofiel.

Het snelheidsveld $\vec{u} = (0, 0, w(r))$ volgt uit vergelijking (6.21b):

$$\mu \left(\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} \right) = \beta_p.$$

Met randvoorwaarden $|w(0)| < \infty$ en $w(R) = 0$ is de oplossing

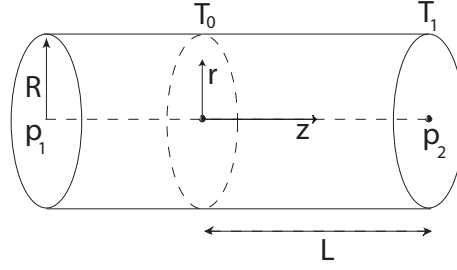
$$w(r) = \frac{\beta_p}{4\mu} (r^2 - R^2).$$

Omdat $L \gg R$, is de axiale geleiding (de term $\partial^2 T / \partial z^2$) veel kleiner dan de radiale en daarmee wordt het probleem voor de temperatuur onder verwaarlozing van de dissipatie (6.21c)

$$w \frac{\partial T}{\partial z} = \kappa \left(\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} \right). \quad (6.22)$$

In het linkerlid staat het warmtetransport door convectie, en in het rechterlid door geleiding. Het woord convectie kan verwarrend zijn, maar is hier volledig op zijn plaats. Het gaat namelijk om transport van warmte door de stroming, en dat is gedefinieerd als convectie. In een stationaire toestand zijn het convectief warmtetransport en de geleiding in balans. De randvoorwaarden zijn voor $r = 0, z \geq 0$: $|T| < \infty$, en voor $r = R, z > 0$:

$$T_w = T_0 + (T_1 - T_0) \frac{z}{L},$$



Figuur 6.7: Geometrie van een geforceerde pijpstroming.

waardoor $T(r, z)$ de volgende vorm kan hebben:

$$T(r, z) = T_w + \Theta(r), \quad (6.23)$$

voor een zekere functie $\Theta(r)$ met $\Theta(R) = 0$ en $|\Theta(0)| < \infty$. Invullen in de warmtetransportvergelijking (6.22) geeft

$$\frac{\partial^2 \Theta}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Theta}{\partial r} = \gamma(r^2 - R^2),$$

waarin $\gamma = \frac{\beta_p(T_1 - T_0)}{4\mu\kappa L}$. De oplossing is

$$\Theta(r) = \frac{\gamma R^4}{16} \left[\left(\frac{r}{R} \right)^4 + 3 - 4 \left(\frac{r}{R} \right)^2 \right].$$

Van de door een bepaalde doorsnede van de buis stromende vloeistof kan een gemiddelde temperatuur T_F worden gedefiniëerd met

$$T_F = \frac{\int_0^R T w \, r \, dr}{\int_0^R w \, r \, dr} = \frac{2\pi\rho_0}{G_m} \int_0^R T w \, r \, dr \quad (6.24)$$

waarbij G_m de totale massa is, die per tijdseenheid door de buis stroomt. De reden waarom de snelheid in deze definitie is betrokken, is dat het centrum van de stroming het meest bijdraagt – snelheid het grootst – tot de warmtestroom door een dwarsdoorsnede van de pijp.

Ook in dit geval kan een partiële warmteoverdrachtscoëfficiënt α_* worden gedefiniëerd als

$$\alpha_*(T_w - T_F) = \kappa \left(\frac{\partial T}{\partial r} \right)_{r=R}$$

waarbij $T_w = T_0 + z(T_1 - T_0)/L$ de wandtemperatuur is. Gebaseerd op α_* wordt een dimensieloos kental gedefiniëerd dat de extra overdracht door convectief transport, ten opzicht van geleiding, aangeeft. Dit is het Nusseltgetal (Nu) gegeven door $Nu = \alpha_* D / \kappa$, waar $D = 2R$ de diameter van de buis is.

Voor bovenstaande oplossing vinden we dat Nu onafhankelijk is van z (vanwege het verwaarlozen van eindeffecten) en gelijk aan $Nu = \frac{48}{11} \approx 4.364$.

Bijlage A

Wiskundig gereedschap

A.1 Vectoridentiteiten

In deze identiteiten is ϕ een scalair veld; $\vec{u}, \vec{v}$ en $\vec{w}$ zijn vectorvelden.

$$\begin{aligned}\vec{u} \times \vec{v} &= -\vec{v} \times \vec{u} \\ \vec{u} \cdot \nabla \vec{u} &= \frac{1}{2} \nabla (\vec{u} \cdot \vec{u}) - \vec{u} \times (\nabla \times \vec{u}) \\ \nabla \cdot (\phi \vec{u}) &= \phi \nabla \cdot \vec{u} + \vec{u} \cdot \nabla \phi \\ \nabla \times (\phi \vec{u}) &= \phi \nabla \times \vec{u} + (\nabla \phi) \times \vec{u} \\ \nabla \times (\nabla \times \vec{u}) &= \nabla (\nabla \cdot \vec{u}) - (\nabla \cdot \nabla) \vec{u} \\ \vec{u} \times \vec{v} \times \vec{w} &= (\vec{u} \cdot \vec{w}) \vec{v} - (\vec{v} \cdot \vec{w}) \vec{u} \\ \nabla \cdot (\vec{v} \times \vec{u}) &= \vec{u} \cdot (\nabla \times \vec{v}) - \vec{v} \cdot (\nabla \times \vec{u}) \\ \nabla \times \nabla \phi &= 0 \\ \nabla \cdot (\nabla \times \vec{u}) &= 0 \\ \nabla \times (\vec{v} \times \vec{u}) &= (\vec{u} \cdot \nabla) \vec{v} - \vec{u} (\nabla \cdot \vec{v}) \\ &\quad - (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{u} + \vec{v} (\nabla \cdot \vec{u}) \\ \nabla (\vec{v} \cdot \vec{u}) &= (\vec{u} \cdot \nabla) \vec{v} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{u} \\ &\quad + \vec{u} \times (\nabla \times \vec{v}) + \vec{v} \times (\nabla \times \vec{u})\end{aligned}$$

A.2 Tensoridentiteiten

In deze identiteiten is $\vec{u}$ een vectorveld en $\mathbf{A}$ een tweede orde tensor. Allereerst, de definitie van een inproduct van een tensor en een vector:

$$\begin{aligned}\mathbf{A} \cdot \vec{u} &\iff A_{ij} u_j \\ \vec{u} \cdot \mathbf{A} &\iff u_i A_{ij}\end{aligned}$$

Voor een symmetrische tensor σ geldt de volgende relatie:

$$\nabla \cdot (\vec{u} \cdot \sigma) = \vec{u} \cdot (\nabla \cdot \sigma) + (\sigma \cdot \nabla) \cdot \vec{u}.$$

A.3 Integraal relaties

A.3.1 Theorema van Stokes:

Als $\vec{u}$ een vectorveld is, $\vec{S}$ een willekeurig oppervlak met rand $\vec{l}$ dan geldt:

$$\int_l \vec{u} \cdot d\vec{l} = \int_S (\nabla \times \vec{u}) \cdot d\vec{S}.$$

A.3.2 Theorema van Gauss:

Is V een willekeurig volume omsloten door het oppervlak $\vec{S}$ dan geldt (met $d\vec{S} = \vec{n} dS$):

$$\int_V \nabla \cdot \vec{u} dV = \int_S \vec{u} \cdot d\vec{S}.$$

A.3.3 Circulatie

De circulatie, Γ , langs een gesloten kromme in de vloeistof wordt gegeven door de lijnintegraal:

$$\Gamma = \oint_C \vec{u} \cdot d\vec{l}.$$

In een rotatievrije stroming is de circulatie 0, want met het theorema van Stokes (Subsectie A.3.1) kan de lijn-integraal als een oppervlakte-integraal geschreven worden over een willekeurig oppervlak S begrensd door de kromme C :

$$\oint_C \vec{u} \cdot d\vec{l} = \int_S (\nabla \times \vec{u}) \cdot \vec{n} dS = \int_S \vec{\omega} \cdot \vec{n} dS.$$

A.4 Integraal transformaties

A.4.1 Laplace transformaties

Voor de onderstaande elementaire functies is de Laplace transformaties gedefiniëerd als:

$$F(s) = \int_0^\infty f(t) e^{-st} dt.$$

$f(t)$	$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$	
a	as^{-1}	$s > 0$
at	as^{-2}	$s > 0$
$\frac{at^{n-1}}{(n-1)!}$	as^{-n}	$s > 0$
$(\pi t)^{-1/2}$	$s^{-1/2}$	$s > 0$
$e^{at}, a \in \mathbb{R}$	$(s-a)^{-1}$	$s > a$
$te^{at}, a \in \mathbb{R}$	$(s-a)^{-2}$	$s > a$
$(a-b)^{-1}(e^{at} - e^{bt})$	$(s-a)^{-1}(s-b)^{-1}$	
$(a-b)^{-1}(ae^{at} - be^{bt})$	$s^{-1}(s-a)^{-1}(s-b)^{-1}$	
$a^{-1} \sin(at), a \in \mathbb{R}$	$(s^2 + a^2)^{-1}$	$s > 0$
$\cos(at)$	$s(s^2 + a^2)^{-1}$	$s > 0$
$(\pi t)^{-1/2} - a \exp\{a^2 t\} \operatorname{Erfc}\{at^{-1/2}\}$	$(s^{1/2} + a)^{-1}$	
$\operatorname{Erfc}(\frac{k}{2}t^{-1/2}), k > 0$	$s^{-1} \exp\{-ks^{1/2}\}$	$s > 0$
$\exp\{a^2 t\} \operatorname{Erf}\{at^{-1/2}\}$	$s^{-1/2}(s^{1/2} + a)^{-1}$	
$\sinh(at)$	$a(s^2 - a^2)^{-1}$	$s > a $
$\cosh(at)$	$s(s^2 - a^2)^{-1}$	$s > a $

A.4.2 Fourier transformaties

Voor de onderstaande elementaire functies is de Fourier transformatie gedefiniëerd als (b is reëel) :

$$\hat{f}(k) = \int_{-\infty}^\infty f(x) e^{-ikx} dx.$$

$f(x)$	$\hat{f}(k) = \mathcal{F}\{f(x)\}$	$f(x)$	$\hat{f}(k) = \mathcal{F}\{f(x)\}$
a	$2\pi a \delta(k)$	$\frac{x}{x^2 + b^2}$	$\frac{-\pi i k}{b} e^{-bk}$
e^{ibx}	$2\pi \delta(k - b)$	$\int_0^x g(t) dt$	$\frac{1}{ik} \hat{g}(k) + c \delta(k), c \in \mathbb{R}$
$a \delta(x + b)$	$a e^{-ikb}$	$g(x - b)$	$e^{-ikb} \hat{g}(k)$
e^{-bx^2}	$\sqrt{\frac{\pi}{b}} e^{-k^2/(4b)}$	$e^{ixb} g(x)$	$\hat{g}(k - b)$
$\frac{1}{x^2 + b^2}$	$\frac{\pi}{b} e^{-bk}$		

A.5 Differentiaalrelaties in verschillende coördinatenstelsels

We geven de vorm van een aantal differentiaaloperatoren en de Navier-Stokes vergelijkingen in cilindrische- en bolcoördinaten. We gaan uit van een divergentieloze stroming zonder volume krachten. De vergelijkingen daarvoor luiden

$$\frac{d\vec{u}}{dt} = -\frac{1}{\rho}\nabla p + \nu\Delta\vec{u}.$$

Deze vergelijking bevat alle voorkomende wiskundige elementen. Met de onderstaande gegevens kunnen dus alle vergelijkingen omgeschreven worden naar een ander coördinaten systeem. In deze vergelijkingen is ϕ een willekeurige scalarfunctie.

A.5.1 Bolcoördinaten 3-D

$$\vec{x} = (r, \vartheta, \varphi), \quad \vec{u} = (u_r, u_\vartheta, u_\varphi) \quad \vec{v} = (v_r, v_\vartheta, v_\varphi)$$

$$\nabla\phi = \begin{pmatrix} \frac{\partial\phi}{\partial r} \\ \frac{1}{r} \frac{\partial\phi}{\partial\vartheta} \\ \frac{1}{r \sin\vartheta} \frac{\partial\phi}{\partial\varphi} \end{pmatrix}$$

$$(\vec{u} \cdot \nabla)\vec{v} = \begin{pmatrix} (\vec{u} \cdot \nabla)v_r - \frac{u_\vartheta v_\vartheta}{r} - \frac{u_\varphi v_\varphi}{r} \\ (\vec{u} \cdot \nabla)v_\vartheta - \frac{u_\varphi v_\varphi}{r} \cot\vartheta + \frac{u_\vartheta v_r}{r} \\ (\vec{u} \cdot \nabla)v_\varphi + \frac{u_\varphi v_r}{r} + \frac{u_\varphi v_\vartheta}{r} \cot\vartheta \end{pmatrix}$$

$$\nabla \cdot \vec{u} = \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{2}{r}u_r + \frac{1}{r \sin\vartheta} \frac{\partial(u_\vartheta \sin\vartheta)}{\partial\vartheta} + \frac{1}{r \sin\vartheta} \frac{\partial u_\varphi}{\partial\varphi}$$

$$\nabla \times \vec{u} = \frac{1}{r^2 \sin\vartheta} \begin{pmatrix} \frac{\partial(ru_\varphi \sin\vartheta)}{\partial\vartheta} - \frac{\partial ru_\vartheta}{\partial\varphi} \\ r \frac{\partial u_r}{\partial\varphi} - r \frac{\partial(ru_\varphi \sin\vartheta)}{\partial r} \\ \left(\frac{\partial(ru_\vartheta)}{\partial r} - \frac{\partial u_r}{\partial\vartheta}\right)r \sin\vartheta \end{pmatrix}$$

$$\Delta\phi = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial\phi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin\vartheta} \frac{\partial}{\partial\vartheta} \left(\sin\vartheta \frac{\partial\phi}{\partial\vartheta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2\vartheta} \frac{\partial^2\phi}{\partial\varphi^2}$$

Vervormingssnelheidstensor

$$\begin{aligned}
 e_{11} &= \frac{\partial u_r}{\partial r} \\
 e_{22} &= \frac{1}{r} \frac{\partial u_\vartheta}{\partial \vartheta} + \frac{u_r}{r} \\
 e_{33} &= \frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{u_r}{r} + \frac{u_\vartheta \cos \vartheta}{r \sin \vartheta} \\
 e_{12} = e_{21} &= \frac{r}{2} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{u_\vartheta}{r} \right) + \frac{1}{2r} \frac{\partial u_r}{\partial \vartheta} \\
 e_{13} = e_{31} &= \frac{1}{2r \sin \vartheta} \frac{\partial u_r}{\partial \varphi} + \frac{r}{2} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{u_\varphi}{r} \right) \\
 e_{23} = e_{32} &= \frac{\sin \vartheta}{2r} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left(\frac{u_\varphi}{\sin \vartheta} \right) + \frac{1}{2r \sin \vartheta} \frac{\partial u_\vartheta}{\partial \varphi}
 \end{aligned}$$

Bewegingsvergelijkingen

$$\begin{aligned}
 \frac{du_r}{dt} - \frac{u_\vartheta^2 + u_\varphi^2}{r} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} + \nu \left\{ \Delta u_r - \frac{2u_r}{r^2} - \frac{2}{r^2 \sin \vartheta} \frac{\partial(u_\vartheta \sin \vartheta)}{\partial \vartheta} - \frac{2}{r^2 \sin \vartheta} \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} \right\} \\
 \frac{du_\vartheta}{dt} + \frac{u_r u_\vartheta}{r} - \frac{u_\varphi^2 \cot \vartheta}{r} &= -\frac{1}{\rho r} \frac{\partial p}{\partial \vartheta} + \nu \left\{ \Delta u_\vartheta + \frac{2}{r^2} \frac{\partial u_r}{\partial \vartheta} - \frac{u_\vartheta}{r^2 \sin^2 \vartheta} - \frac{2 \cos \vartheta}{r^2 \sin^2 \vartheta} \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} \right\} \\
 \frac{du_\varphi}{dt} + \frac{u_r u_\varphi}{r} - \frac{u_\varphi u_\vartheta \cot \vartheta}{r} &= -\frac{1}{\rho r \sin \vartheta} \frac{\partial p}{\partial \varphi} + \\
 &\quad + \nu \left\{ \Delta u_\varphi + \frac{2}{r^2 \sin \vartheta} \frac{\partial u_r}{\partial \varphi} - \frac{u_\varphi}{r^2 \sin^2 \vartheta} + \frac{2 \cos \vartheta}{r^2 \sin^2 \vartheta} \frac{\partial u_\vartheta}{\partial \varphi} \right\}
 \end{aligned}$$

A.5.2 Cilindercoordinaten

$$\vec{x} = (z, r, \vartheta), \vec{u} = (u_z, u_r, u_\vartheta), \vec{v} = (v_z, v_r, v_\vartheta)$$

$$\begin{aligned}
 \nabla \phi &= \begin{pmatrix} \frac{\partial \phi}{\partial z} \\ \frac{\partial \phi}{\partial r} \\ \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \vartheta} \end{pmatrix} \\
 (\vec{u} \cdot \nabla) \vec{v} &= \begin{pmatrix} (\vec{u} \cdot \nabla) v_z \\ (\vec{u} \cdot \nabla) v_r - \frac{u_\vartheta v_\vartheta}{r} \\ (\vec{u} \cdot \nabla) v_\vartheta + \frac{u_\vartheta v_r}{r} \end{pmatrix} \\
 \nabla \cdot \vec{u} &= \frac{\partial u_z}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial(r u_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\vartheta}{\partial \vartheta}
 \end{aligned}$$

$$\nabla \times \vec{u} = \begin{pmatrix} \frac{1}{r} \frac{\partial(ru_\vartheta)}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \vartheta} \\ \frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \vartheta} - \frac{1}{r} \frac{\partial ru_\vartheta}{\partial z} \\ \frac{\partial u_r}{\partial z} - \frac{\partial u_z}{\partial r} \end{pmatrix}$$

$$\Delta\phi = \frac{\partial^2\phi}{\partial z^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial\phi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2\phi}{\partial \vartheta^2}$$

Vervormingssnelheidstensor

$$e_{zz} = \frac{\partial u_z}{\partial z}$$

$$e_{rr} = \frac{\partial u_r}{\partial r}$$

$$e_{\vartheta\vartheta} = \frac{1}{r} \frac{\partial u_\vartheta}{\partial \vartheta} + \frac{u_r}{r}$$

$$e_{zr} = e_{rz} = \frac{1}{2} \frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{1}{2} \frac{\partial u_z}{\partial r}$$

$$e_{z\vartheta} = e_{\vartheta z} = \frac{1}{2r} \frac{\partial u_z}{\partial \vartheta} + \frac{1}{2} \frac{\partial u_\vartheta}{\partial z}$$

$$e_{r\vartheta} = e_{\vartheta r} = \frac{r}{2} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{u_\vartheta}{r} \right) + \frac{1}{2r} \frac{\partial u_r}{\partial \vartheta}$$

Bewegingsvergelijkingen

$$\frac{du_z}{dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \nu \Delta u_z$$

$$\frac{du_r}{dt} - \frac{u_\vartheta^2}{r} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} + \nu \left\{ \Delta u_r - \frac{u_r}{r^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial u_\vartheta}{\partial \vartheta} \right\}$$

$$\frac{du_\vartheta}{dt} + \frac{u_r u_\vartheta}{r} = -\frac{1}{\rho r} \frac{\partial p}{\partial \vartheta} + \nu \left\{ \Delta u_\vartheta + \frac{2}{r^2} \frac{\partial u_r}{\partial \vartheta} - \frac{u_\vartheta}{r^2} \right\}$$

A.5.3 Poolcoordinaten 2-D

$$\vec{x} = (r, \varphi), \vec{u} = (u_r, u_\varphi), \vec{v} = (v_r, v_\varphi)$$

$$\nabla\phi = \begin{pmatrix} \frac{\partial\phi}{\partial r} \\ \frac{1}{r} \frac{\partial\phi}{\partial \varphi} \end{pmatrix}$$

$$(\vec{u} \cdot \nabla) \vec{v} = \begin{pmatrix} (\vec{u} \cdot \nabla) v_r - \frac{u_\varphi v_\varphi}{r} \\ (\vec{u} \cdot \nabla) v_\varphi + \frac{u_\varphi v_r}{r} \end{pmatrix}$$

$$\nabla \cdot \vec{u} = \frac{1}{r} \frac{\partial(r u_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi}$$

$$(\nabla \times \vec{u})_z = \left\{ \frac{1}{r} \frac{\partial(r u_\varphi)}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \varphi} \right\}$$

$$\Delta \phi = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \phi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \varphi^2}$$

Vervormingssnelheidstensor

$$e_{rr} = \frac{\partial u_r}{\partial r}$$

$$e_{\varphi\varphi} = \frac{1}{r} \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{u_r}{r}$$

$$e_{r\varphi} = e_{\varphi r} = \frac{r}{2} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{u_\varphi}{r} \right) + \frac{1}{2r} \frac{\partial u_r}{\partial \varphi}$$

Bewegingsvergelijkingen

$$\frac{du_r}{dt} - \frac{u_\varphi^2}{r} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} + \nu \left\{ \Delta u_r - \frac{u_r}{r^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} \right\}$$

$$\frac{du_\varphi}{dt} + \frac{u_r u_\varphi}{r} = -\frac{1}{\rho r} \frac{\partial p}{\partial \varphi} + \nu \left\{ \Delta u_\varphi + \frac{2}{r^2} \frac{\partial u_r}{\partial \varphi} - \frac{u_\varphi}{r^2} \right\}$$

Bijlage B

Werkcollege opgaven

Cursief gedrukte opgaven zijn optioneel omdat deze over wiskundige kennis gaan die eigenlijk bekend wordt verondersteld.

Chapter 1: Introduction

1.1 Dimensionless numbers

- a) Estimate the length scale of the following geophysical flows:

Flow	Typical velocity
Mantle convection in the Earth	10^{-10}
A glacier in the Alps	10^{-7}
The Atlantic Ocean	10^{-2}
A depression	10^1
A stellar nebula	10^4

and estimate the timescales using the given velocities.

- b) Using the following fluid properties listed in Tables B.1 and B.2, estimate if molecular viscosity and conductivity, as well as earth rotation are important for the flow in Alpine glaciers, the Atlantic Ocean and depressions. What does the dimensionless numbers imply?

1.2 Turbulence

Describe a couple aspects of turbulence.

Tabel B.1: *Some material properties*

	kinematic viscosity ν $\text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$	thermal conductivity k $\text{W} \cdot (\text{K} \cdot \text{m})^{-1}$	density ρ $\text{kg} \cdot \text{m}^{-3}$	heat capacity c_p $\text{W} \cdot \text{s} \cdot (\text{kg} \cdot \text{K})^{-1}$
air (0 °C)	$1.3 \cdot 10^{-5}$	0.025	1.3	1.0
sea water (10 °C)	$1.0 \cdot 10^{-6}$	0.6	$1.0 \cdot 10^3$	$3.9 \cdot 10^3$
ice (-0 °C)	$\sim 10^7$	2	$9.1 \cdot 10^2$	$2.2 \cdot 10^3$

Tabel B.2: *A few dimensionless numbers*

Abbreviation	Name	Definition timescale	Dimensionless timescale
Re	Reynolds number	L^2/ν	UL/ν
Pr	Prandtl number(*)	$\nu\rho c_p/k = \nu/\kappa$	
Re x Pr		L^2/κ	UL/κ
Ro	Rossby number	f (**)	$U/(Lf)$

(*) The Prandtl number is not a timescale but a ratio of momentum diffusivity and thermal diffusivity.

(**) $f \approx 10^{-4} \text{ s}^{-1}$.

1.3 Turbulence in outer space

Visit the site <http://www.eso.org/public/images/>, and try to find pictures with cosmological turbulence.

Chapter 2: The Navier-Stokes equations

2.1 Total derivative

Write the total derivative of a pressure field $p(\vec{x}, t)$ in

- Vector notation.
- Tensor notation in a Cartesian coordinate system.
- Tensor notation in a spherical coordinate system.

2.1b Total derivative

Derived the time and total derivative of the following quantity f and the velocity $\vec{u}$.

$$\begin{aligned} f(\vec{x}, t) &= \sin^2(x + y^2 + t) \\ \vec{u}(\vec{x}, t) &= \cos(2y - x)e^{-t} \end{aligned}$$

2.2 Friction in an incompressible fluid

Show that (2.23) follows from (2.22) for an incompressible fluid.

2.2b Vorticity

Newton's law applied on a continuum with constant density ρ reads

$$\rho \frac{d\vec{u}}{dt} = \vec{F}$$

Some forces on a fluid are derivable in terms of the gradient of a potential ($= \nabla P$), others not ($= \vec{F}_c$).

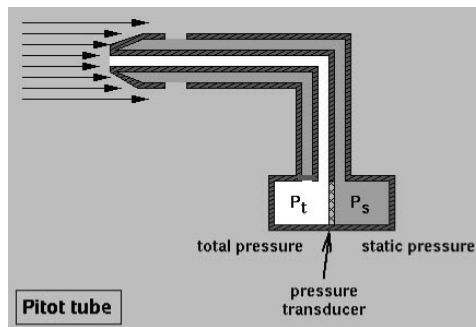
If we separate these two types of forces, we get

$$\rho \frac{d\vec{u}}{dt} = \vec{F}_c + \nabla P$$

The vorticity $\vec{\omega}$ of a fluid is defined as

$$\vec{\omega} = \nabla \times \vec{u}$$

Derive the total derivative of vorticity and discuss the additional and disappeared terms.



Figuur B.1: Schematic representation of a pitot tube with total pressure (P_t) and the static pressure (P_s)

2.3 Energy conservation

- Show that $\nabla \cdot (\vec{u} \cdot \boldsymbol{\sigma})$ equals indeed $\vec{u} \cdot (\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}) + (\boldsymbol{\sigma} \cdot \nabla) \cdot \vec{u}$. If you are in a hurry, use Einstein notation.
- Derive Equation (2.27) from Equations (2.25), (2.26) and (2.21), and
- Verify, while doing a), the relation for ϵ (Equation (2.28)).

2.4 Heating by dissipation

Bring water in a small container, for example, a tea cup, in motion by steering. After a while, the fluid comes to rest, all kinematic energy has been dissipated into heat. Estimate the temperature increase between the motion free initial state and the motion free end state. The specific heat capacity of water is about $4200 \text{ J kg}^{-1} \text{ K}^{-1}$.

Chapter 3: Potential flows

3.1 Equation (3.9)

Deduce Equation (3.9) from Equation (3.7)

3.2 The total derivative of vorticity

- Derive Equation (3.3), the total derivative of $\vec{\omega}$ for incompressible fluids, from Equation (2.32).
- Next, show that this relation reduces to Equation (3.5) for ideal 2-D flows with constant density.

3.3 Pitot tube

A pitot tube (see Figure B.1) is an instrument that measures the velocity of a flow using Bernoulli's law.

- Derive the relation between the pressure difference inside the pitot tube and the flow velocity of the plane.
- Make a sketch of the relation between the velocity and pressure difference ($P_t - P_s$) for velocities between 0 and 250 m s^{-1} . Do this for near surface conditions ($p = 1000 \text{ hPa}$, $\rho = 1 \text{ kg m}^{-3}$) and cruising altitude (11 km, $p = 250 \text{ hPa}$, $\rho = 0.3 \text{ kg m}^{-3}$).
- Which pressure (total pressure or static pressure) does actually change if the pitot tube is mounted on a device that moves with different speeds through a (near) motionless fluid?

3.4 Complex potential

Determine for the complex potentials of a stagnation point (3.23), a point source / sink (3.24), a vortex (3.25) and a doublet (3.27)

- the stream function,
- the velocity potential
- and the velocity components u and v .

Hint: $\ln(z) = \ln(|z|) + i \arg(z)$, or in polar coordinates, $z = \ln(r) + i\theta$, with $z = re^{i\theta}$.

3.5 A doublet

Derive Equation (3.27) from (3.26).

3.6 Doublet: Double vortex or dipole?

- Construct the complex potential of two vortices on a distance $2a$ on the x-axis, with strengths Γ (at $x = -a$) and $-\Gamma$ (at $x = a$).
- Calculate the complex potential for $a \rightarrow 0$, $\Gamma \rightarrow \infty$ and $2\Gamma a = \gamma$ is finite.
- How does this flow relate to a doublet?

3.7 Circulation around a doublet

Calculate the circulation around a doublet over a circle with radius r and the doublet in the center of the circle.

3.8 Forces on a cylinder

Calculate the forces on a cylinder in the x and y direction using Equations (3.30).

3.9 Transformations

Visit on the website <http://efluids.com> the Ideal Flow Machine, which you can find following

- calculators and applets
- potential flow machine
- launch Ideal Flow Machine

A sketch is made by inserting flow components and then drawing streamlines. For a flow around a rotating cylinder, you need a Free Stream, a Vortex and a Dipole.

- a) Is a positive or negative dipole strength required for a flow around a cylinder?
- b) Make a simulation of a flow around a cylinder with its center in the origin. Chose such parameters so that the sketch reproduces Figure 3.4b.
- c) Calculate the radius of the cylinder for the parameters you have chosen.
- d) Make a projection of this flow using Joukowski transform. This transform is already implemented in the applet; click on show mapping and chose the right function. Use 'a'=1 and 'b'=radius cylinder (a).
- e) Repeat this conformal mapping for the following cases:

1. A cylinder with its center away from the origin, but its center is still on the x -axis and the origin is enclosed in the cylinder
 2. A cylinder with its center on a random location in the zeta-plane, but still enclosing the origin.
- f) Print the results and (e)mail these to w.j.vandenberg@uu.nl

Chapter 4: Viscous flows

4.1 Falling water

We consider a constant laminar flowing film of water along an infinitely high smooth wall (Figuur 4.2). The water layer has a constant thickness L and experiences no other external force than gravity.

- a) Reduce the momentum Equation (4.1) to the non-zero terms.
- b) The air surrounding the falling film puts no force on the fluid film and has a density much smaller than the density of water. Reduce the equations even further and find the constraints of the solution.
- c) Find the relation for the flow velocity.
- d) What is the maximum layer thickness for a film to be laminar ($Re < 1000$)? Use $\mu = \rho\nu = 1.3 \cdot 10^{-3} \text{ kg m}^{-1} \text{ s}^{-1}$, $\rho = 10^3 \text{ kg m}^{-3}$ and $g = 10 \text{ m s}^{-2}$.

4.3 A finite boundary layer

Make a dimension analysis of the boundary layer equation, i.e. the momentum equation in x -direction for a 2D (x, z) flow (see, for example, page 46). Introduce the dimensionless variables $x' = x/L$, $z' = z/h$, $u' = u/U$, in which L and h denote the horizontal and vertical length scale, respectively, and U denote the horizontal velocity scale. Determine firstly the vertical velocity scale using the continuity equation. Apply this result on the boundary layer equation and show that the equations at the lower left of page 49 can be derived.

4.3 Derive Equation (4.4)

Hints: ψ is defined as on page 46. Introduce ψ first in the momentum equation, then change to the η -coordinate.

4.4 Stokes flow around a sphere

- a) Construct Equations (4.6), (4.7) and (4.8) from (4.5), using the relations in the Appendix.
- b) Show that u and v in Equation (4.9) obey the continuity equation.
- c) Deduce from the boundary conditions the constants A, B, C and D of the function $f(r)$ (Framebox 4.1).
Hint: one boundary condition is that $\vec{u} = 0$ for $r = a$. Which restrictions does that give for $f(r)$ or $f'(r)$?
- d) Estimate the terminal fall velocity of two cloud droplets with a radius of 0.1 and 1 mm, respectively. Use $\rho_{\text{air}} = 1.3 \text{ kg/m}^3$, $g = 9.81 \text{ m/s}^2$ and $\mu = 1.8 \cdot 10^{-5} \text{ kg/(ms)}$. Discuss, with the Reynolds number in mind, whether if these results are realistic or not.

Chapter 5: Non-Newtonian fluids

5.1 Getting used to it...

We deform a fluid, and the relative locations $\vec{a}$ of the small fluid subsection for a small time interval starting at $t = 0$ are given by

$$\vec{a}(x, y, z, t) = \begin{pmatrix} (4x + 2y + 6z)t \\ (-8x + 2y - 4z)t \\ (4x - 2y)t \end{pmatrix}$$

- Calculate $\vec{da}$ for the fluid starting at $\{1, 2, 1\}$ after $t = 0.01$.
- Write out the nine tensor elements of $\frac{\partial a_i}{\partial x_j}$ for a time step Δt .
- Split the rotational and deformation part of $\frac{\partial a_i}{\partial x_j}$ for a time step Δt .
- Derive $\mathbf{e}$ and $\dot{\boldsymbol{\gamma}}$ for this fluid subsection (neglect advection terms).
- Derive $\dot{\boldsymbol{\gamma}}$, thus $\sqrt{\dot{\boldsymbol{\gamma}} \cdot \dot{\boldsymbol{\gamma}}}$.

5.2 Another derivation

Deduce Equation (5.8) from Equation (2.14) and the definitions of $\mathbf{e}$ and $\boldsymbol{\sigma}$.

5.3 Glacier flow

The standard momentum equation for a fluid where friction and deformation speed are not linearly related, is:

$$\rho \frac{d\vec{u}}{dt} = -\nabla p + \nabla \cdot \boldsymbol{\tau} + g\vec{e}_3$$

- Rewrite the equation as a function of only u , H and the material properties (ρ, n, μ) . Use the following characteristics:
 - The Reynolds number of the flow is very small.
 - Horizontal pressure gradients are caused by differences in the height of the ice surface (H).
 - The flow is 2-D (x and z), only in the x-direction and $\frac{\partial u}{\partial z} \gg \frac{\partial u}{\partial x}$.
 - Ice behaves as a pseudoplastic power-law fluid, so $\boldsymbol{\tau} = \mu |\dot{\boldsymbol{\gamma}}|^{n-1} \dot{\boldsymbol{\gamma}}$. The deviant deformation tensor $\dot{\boldsymbol{\gamma}}$ is defined as

$$\dot{\gamma}_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right),$$

where $\vec{u}$ is divergence free. The length of the tensor $\dot{\boldsymbol{\gamma}}$ is given by $\sqrt{\dot{\boldsymbol{\gamma}}_{ij}^2}$.

- Show that $u(z)$ depends on H , $\partial H / \partial x$ and the material properties $(\rho, \mu, s = 1/n)$ with:

$$u(z) = \left(\frac{\rho}{\mu} \frac{\partial H}{\partial x} \right)^s \frac{(\sqrt{2})^{s(n-1)}}{s+1} ((z-H)^{s+1} + (-1)^s H^{s+1}).$$

- Deduce for $n = 1/3$ an equation that describes the total flux $(= \int_0^H u(z) dz)$.

5.4 Invariants

The two dimensional tensor A has the elements a, b, c and d . Verify that $2 \det(A) = I^2 - II$, in which I and II are the two invariants of the matrix A and the determinant $\det(A)$ is defined as

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc.$$

Chapter 6: Heat transport

6.1 What if...

The 1D heat equation reads $\frac{\partial T}{\partial t} = \kappa \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$. So, for the Laplace transform $\Theta_L(s, x)$, the constituting equation is $s\Theta_L - T_0 = \kappa \frac{\partial^2 \Theta_L}{\partial x^2}$, and for the Fourier transform $\Theta_F(t, k)$, the constituting equation is $\frac{\partial \Theta_F}{\partial t} = -k^2 \kappa \Theta_F$. How would these constituting equations look like if the 1D heat equation was

$$\frac{\partial^2 T}{\partial t^2} = \lambda \frac{\partial T}{\partial x} - \kappa \frac{\partial^3 T}{\partial x^3}.$$

6.2 The heated rod

- Derive Equation (6.7) from Equation (6.6) using Laplace transformation.
- Repeat this derivation, but now by direct differentiation of the solution of $T(x, t)$ (Equation (6.5)).
(The derivative of $\text{Erfc}(x)$ can be found on page 69 of the reader, although it is not clearly marked).
- Make an analysis of the problem of the heat transfer through a iron rod with length L . Estimate how long you can hold one side of this rod in your hand, while you keep the other side in a fire. Use for a specific answer $\kappa \approx 10^{-4} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$ and $L = 1 \text{ m}$.

6.3 Fourier transformations

Derive the four properties of Fourier transformations as listed on page 70.

6.4 Fourier transformation

Find $T(x, t)$ for a temperature evolution starting with $T(t = 0, x) = T_0 \cos(lx)$, in which T_0 and l are a certain initial temperature amplitude and wavenumber, respectively. Start with the heat equation (Equation (6.4)) and use Fourier transformations for this problem.

Mathematical hint (l is real): remember that $\cos(lx) = \frac{1}{2} (e^{ilx} + e^{-ilx})$.

6.5 Parameter separation

We consider a single periodic solution for a half infinitive material (see Equation (6.12)), thus

$$T(x, t) = T_a e^{-\sqrt{\omega/(2\kappa)} x} \cos(\omega t - \sqrt{\frac{\omega}{2\kappa}} x).$$

Show that the depth where the snow reaches its lowest temperature during the year (thus $\delta T / \delta t = 0$) is not equal to the depth with the lowest temperature (thus $\delta T / \delta x = 0$). For convenience, use $x \in [0, \infty)$, analyze this for $t = 0$ and look for the first temperature minimum.

6.6 Equation (6.13)

Show stepwise that Equation (6.13) implies that density levels must match equipotential levels for a fluid in rest.

6.7 Density differences as a trigger for motion.

In Equation (6.17), density differences have appeared explicitly. However, not all density differences will lead to motion. This is illustrated with Bjerkness' circulation theorem which is discussed in Frame 3.6.

- Deduce Equation (3.44) from (3.42) using (3.43) and Stokes theorem (Appendix A.3.1).
- Give a physical interpretation of Bjerkness' theorem.
- What can be concluded from the fact that the total derivative of $\vec{\omega}$, (Equation (3.3)) has a term $(\vec{\omega} \cdot \nabla)\vec{u}$ and the derivative of Γ (Equation (3.44)) does not have this term.

6.8 Forced convection in a pipe

In this exercise, we will estimate how fast a pipe (radius R) with warm water will cool down due to heat emission. Material properties of water are listed in Table B.3.

Objects emit long wave radiation (j^* , [W/m²]) obeying the Stefan-Boltzmann law:

$$j^* = \epsilon \sigma T^4,$$

in which ϵ denotes the emissivity, i.e., ability to emit radiation, σ the Stefan-Boltzmann constant ($5.67 \cdot 10^{-8}$) and T the temperature in Kelvin. The net energy loss of the warm pipe is the difference between the absorbed and emitted long wave radiation. In this exercise we use that the pipe and the surrounding room behave like black bodies, thus that $\epsilon = 1$.

- Derive an expression for the energy loss $q(R)$ for a pipe wall temperature T_p and an ambient temperature T_a , and calculate the heat loss per square meter pipe surface for T_p is 353 K ($\approx 80^\circ\text{C}$) and T_a is 291 K ($\approx 18^\circ\text{C}$).

We assume that the pipe wall is a perfect heat transmitter, thus that T_p equals the water temperature at the pipe wall.

- Why is a slightly reformulated version of Equation (7.6), namely, $q(R) = -\rho c_v \kappa \frac{\partial T}{\partial r} \Big|_{r=R}$, valid to estimate the heat flux from the flow to the pipe?
- Relate the temperature profile inside the pipe to the LW heat emittance $q(R)$. Thus, relate γ in the function of $\Theta(r)$ to R , $q(R)$ and material properties. (Note: $\Theta(r)$ is not a Fourier or Laplace transform)
- We supply water with a temperature $T_i = T(z=0, r=0)$. Represent the temperature difference between T_i and T_p ($\alpha = T_i - T_p$) as a function of R and γ .

Tabel B.3: *Material properties of water.*

Constant	Abbreviation	Value	Dimension
Density (80 °C)	ρ	973	kg m ⁻³
Heat capacity at constant volume	c_v	$4.2 \cdot 10^3$	J kg ⁻¹ K ⁻¹
Heat conductivity	k	0.6	W m ⁻¹ K ⁻¹
Dynamic viscosity (80 °C)	μ	$3.55 \cdot 10^{-4}$	N s m ⁻²

We are eventually interested in the cooling of the pipe per meter (ΔT), which equals $\frac{T_1 - T_0}{L}$ in the equations in the reader. The only remaining ‘difficult’ unknown in the equations is the pressure decrease per meter β_p .

- e) Express β_p as a function of R , the water flux Q and material properties. For this, integrate $w(r)$ over the pipe cross-sectional area.
- f) Combine everything and express ΔT as a function of Q , R , T_i , T_a and material properties. *Use halfway that $\alpha \ll T_i$, so that $j^*(T_p) \approx j^*(T_i) - \alpha \left. \frac{\partial j^*}{\partial T} \right|_{T=T_i} - \mathcal{O}(\alpha^2)$.*
- g) Calculate ΔT for $Q = 10^{-4} \text{ m}^3/\text{s}$, $R = 0.02 \text{ m}$, $T_i = 353 \text{ K}$, $T_a = 291 \text{ K}$.
- h) Which result would we get if we neglect all we know of the fluid behavior inside the pipe, so estimate ΔT as

$$\Delta T = \frac{-\text{Energy loss}}{\text{Heat capacity} \cdot \text{Average fluid speed}}.$$

Take the energy loss and heat capacity per meter pipe. Which process is responsible for the difference with the relation found before?

6.9 The Nusselt number

- a) What does the Nusselt number represent?
- b) Derive the Nusselt number for the problem in exercise B / section 6.6.1.

Bibliografie

Acheson, D. (1994). *Elementary Fluid Dynamics*. Clarendon press, Oxford.

Batchelor, G. (1970). *An introduction to Fluid Dynamics*. Cambridge Univ. Press.

Index

Δ , 20
 Γ , 81
 δ , *zie* Kronecker delta
 ϵ , *zie* dissipatie
 η , *zie* viscositeit
 κ , *zie* thermische diffusiecoëfficiënt
 μ , *zie* viscositeit
 ∇ , 12
 ν , *zie* viscositeit
 $\dot{\gamma}$, 21
 τ , *zie* spanningstensor
 $\mathbf{e}$, 20, 21
 γ , 21
 φ , *zie* snelheidspotentiaal
 $\vec{\omega}$, 26
 k , *zie* warmtegeleidingscoëfficiënt

 Antarctica, 55
 Archimedes krachten, *zie* buoyancy
 assenstelsel, 47

 barocliene stroming, 39
 barotrope stroming, 39
 behouden grootheid, 15, 26
 behoudswet, 15
 Bernoulli vergelijking, 27, 30, 32, 34
 Bingham vloeistof, 52, 62
 Bjerkness, theorema van, 39
 Boussinesq benadering, 24
 Brinkmangetal, 77
 buoyancy, 9, 67, 78

 Cauchy's spanningsstelling, 17
 Cauchy-Riemann condities, 30, 36
 circulatie, 32, 34
 circulatiethorema van Kelvin, 38, 39
 theorema van Bjerkness, 39
 complex geconjugeerde, 31
 complexe potentiaal w , 30
 conforme afbeelding, 36
 constitutionele vergelijking, 24
 continuïteitsvergelijking, 16, 30
 convectie, 78

 dilatant, 51, 61
 dimensieloos getal, 9

Dirac delta, 71
 dissipatie, 23
 divergentievrije stroming, 27
 druk, 27

 eenheidstensor, 19
 energie
 mechanische energie, 23
 totale energie, 23
 entropie, 23
 errorfunctie Erf, 69
 Euler, Leonhard, 15
 Euleriaanse beschrijving, 14
 Eulervergelijking, 27

 fabric, 56
 falling film, 44
 Fourier transformatie, 70
 Froudegetal, 11

 gedwongen convectie, 78
 geheugenfunctie, 63
 geluidssnelheid, 29
 geopotential, 27
 grenslaag, 40, 46
 grenslaagdikte, 46

 harmonische functie, 30
 hoekbehoudend, 36
 hydrostatische druk, 76

 ideaal gas, 23, 28
 ideale vloeistof, 25
 impulsvergelijking, 16, 19

 Kelvin, circulatiethorema van, 39
 Kronecker delta, 19, 71
 Kutta Joukowski theorema, 34
 Kutta voorwaarde, 38, 40, 46

 Lagrangiaanse beschrijving, 13
 laminaire stroming, 7, 43
 Laplace getransformeerde $\mathcal{L}$, 68
 Laplace transformatie, 68
 Laplace vergelijking, 30
 lengteschaal, 8
 lift, 34, 40

- lineaire vergelijking, 30
- Mach-getal, M , 28
- Magnus effect, 34
- materiële afgeleide, 15
 - total derivative, 15
- Maxwell-model, 63
- moleculair warmtetransport, 67
- Navier-Stokes vergelijking, 20
- Newton, Isaac, 16
 - tweede wet van Newton, 17
- Newtoniaanse vloeistof, 19
- notatie, 12
 - Einstein sommatieconventie, 12
 - matrixnotatie, 12
 - vectornotatie, 12
- Nusseltgetal, 79
- Pécletgetal, 77
- paradox van d'Alembert, 36
- Pitot buis, 27
- Poiseuille stroming, 44
- potentiaalstroming, 30, 36
- Prandtlgetal, 11, 77
- pseudoplastisch, 51, 61
- puntbron, 72
- Raymond bumps, 55
- relaxatiemodulus, 63
- Reynoldsgetal, 9, 11, 25, 43, 47
- Rossbygetal, 10, 11
- rotatievrije stroming, 26, 30
- scalar, 11
- schaalanalyse, 8, 46
- scheiding van variabelen, 72
- Schmidtgetal, 11
- schuifspanning, 44
- sedimentatiesnelheid, 47
- sneeuw, 73
- snelheidspotentiaal, 25, 30, 36
- snelheidsschaal, 8
- spanningstensor, 17, 18
 - tangentiële spanningstensor, $\boldsymbol{\tau}$, 19, 21
- spoor, 19
- stagnatiepunt, 32, 34
- Stokes stroming, 47
- strijklijn, 13
- stroomfunctie, 27, 30, 37, 46
- stroomlijn, 13, 30, 34, 36
- stuwpunt, 27, 34
- superfluiditeit, 25
- thermodynamica
 - 1e hoofdwet, 23
 - 2e hoofdwet, 23
- tijdschaal, 8
- toestandsvergelijking, 23
- trajectorie, 13
- turbulentie, 9, 10, 40
 - turbulente stroming, 8
- vectoroperator, 12
- visco-elastisch, 56
- viscoplastisch, 52
- viscositeit, 9, 22, 25
 - dynamische viscositeit μ , 20, 22
 - kinematische viscositeit ν , 22
 - spanningsafhankelijke viscositeit η , 59
- vloeigrens, 52
- vloeistof-film, 44
- vorticiteit, 26, 36, 46
 - vorticiteitsvergelijking, 26
- warmtecapaciteit c_v , 23
- warmtegeleidingscoëfficiënt, 67
- Weissenberg-effect, 52
- wet van Glen, 61
- wet van Hooke, 63
- yield stress, 52
- zwaartekracht, 44, 49
- tensor, 11
- thermische diffusiecoëfficiënt, 68