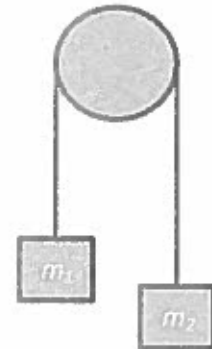


TENTAMEN Klassieke Mechanica, 7 november, 13.30-16.30

- Maak elke opgave op een apart vel
- Zet je naam en studentnummer op elk vel dat je inlevert
- Geef volledige uitwerkingen, sla geen stappen over
- Schrijf duidelijk en vermijd doorhalingen
- Veel succes!

1. Massa's op katrol (15 punten)

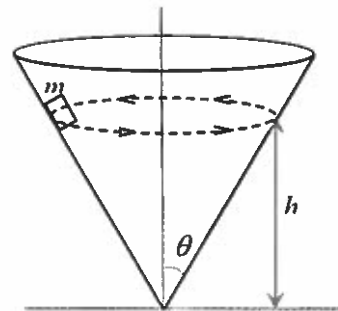
Aan een massaloze, wrijvingsloze katrol hangen twee massa's m_1 en $m_2 (> m_1)$ die met een massaloos touw met elkaar verbonden zijn.



- [5p] Teken en benoem in een krachtendiagram (free body diagram) de krachten die werken op de beide massa's.
- [5p] Bereken de versnelling van beide massa's en de spankracht T in het touw. Druk deze uit in m_1 , m_2 , en de valversnelling g .
- [5p] Hoe groot is de spankracht nadat een van beide massa's de grond geraakt heeft?

2. Beweging over kegeloppervlak (25 punten)

Een speelgoedautootje beweegt over een cirkel aan de binnenzijde van een kegel zoals aangegeven in de figuur. We beschouwen het autootje als een puntmassa m dat met snelheid v wrijvingsloos over het kegeloppervlak beweegt. De cirkel bevindt zich op hoogte h boven de punt van de kegel. De kegelhoek (hoek tussen de centrale as van de kegel en het kegeloppervlak) is θ .



- [5p] Teken het krachtendiagram met alle krachten die werken op het autootje. Geef ook de richting van enige versnelling aan.
- [5p] Geef de normaalkracht die werkt op het autootje, uitgedrukt in m , h , θ , en/of de valversnelling g .
- [5p] Laat zien dat de kinetische energie van het autootje in deze beweging gegeven wordt door $E_{kin} = \frac{1}{2}mhg$.

We vervangen het autootje door een knikker met straal r en met dezelfde massa als het autootje. De knikker rolt slipvrij (er is voldoende statische wrijving tussen knikker en

kegeloppervlak) over dezelfde baan als het autootje. De straal van de knikker is te verwaarlozen ten opzichte van de straal van de cirkel.

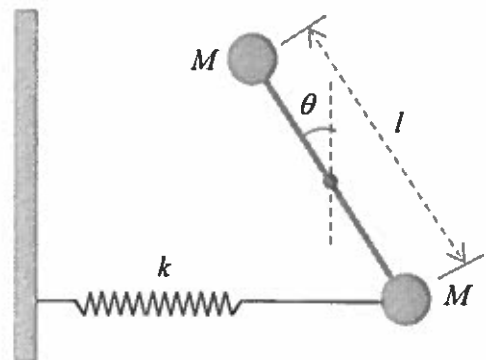
- d) [5p] Bereedeneer of de snelheid van de knikker groter, kleiner of gelijk is dan/aan die van het autootje.
- e) [5p] Geef de kinetische energie van de knikker en druk deze uit in m, h, θ, r en/of g .

[BONUS: 5p] Voor het laatste onderdeel nemen we aan dat er toch enige slip is tussen de knikker en het kegeloppervlak. Als gevolg daarvan neemt de hoogte van de cirkelbaan langzaam af.

- f) Laat zien dat de omlooptijd T van de knikker (tijd per afgelegde cirkel) hierbij afneemt volgens $T = C\sqrt{h}$. De constante C hoeft u niet te berekenen.

3. Halter aan veer (25 punten)

Een halter met massa $2M$ en lengte l kan wrijvingsloos draaien om een massaloze as door het middelpunt van de halter en loodrecht op de halter. Een horizontale massaloze veer met veerconstante k verbindt een van de bollen van de halter met een vast steunpunt. De homogene bollen van de halter hebben straal R , met $R = \sqrt{5/8} l$. De halter wordt gedraaid over een kleine hoek $\theta = \theta_0$ t.o.v. de verticaal, waardoor de veer uitrekt, en wordt vervolgens ($t = 0$) losgelaten.



- a) [5p] Laat zien dat het traagheidsmoment I van de halter gegeven wordt door $I = Ml^2$. Laat vervolgens zien dat de beweging van de halter beschreven wordt door de harmonische vergelijking

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \omega^2\theta = 0$$

Druk ω uit in de grootheden M, l, k . (Maak gebruik van de kleine hoekbenaderingen $\sin \theta \approx \theta$ en $\cos \theta \approx 1$).

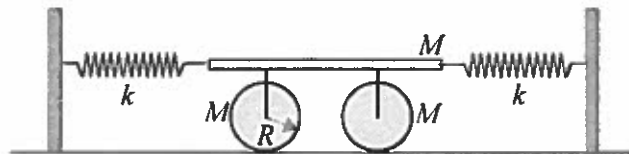
- b) [5p] Geef de volledige oplossing van de beweging van de halter als functie van de tijd met de gegeven randvoorwaarden.

In een nieuwe situatie staat op $t = 0$ de halter verticaal ($\theta = 0$). Op dat moment wordt een kogel met massa m met snelheid v horizontaal in het midden van de bovenste bol geschoten.

- c) [5p] Motiveer welke behoudswetten er tijdens dit proces gelden. Bereken de hoeksnelheid $\omega_0 = \frac{d\theta}{dt}$ van de lat meteen na de botsing ($t = 0$). (Verwaarloos de invloed van de massa van de kogel op het traagheidsmoment).
- d) [10p] Geef de volledige oplossing van de beweging van de halter als functie van de tijd met de nieuwe randvoorwaarden.

4. Karretje aan twee veren (35 punten)

Een karretje is verbonden met twee massalose veren zoals aangegeven in de figuur. De veren hebben dezelfde veerconstante k en zijn elk met een uiteinde verbonden aan een vaste



wand en met het andere aan het karretje. In de evenwichtspositie, die we aanduiden met $x = 0$, hebben beide veren hun rustlengte. De wielen van het karretje zijn te beschouwen als homogene cilinders met massa M en straal R . De wielen rollen slipvrij over de tafel. Het plateau van het karretje heeft ook een massa M . We brengen het karretje uit de evenwichtspositie, waarna het karretje gaat bewegen.

- a) [5p] Welke horizontale krachten werken op het karretje wanneer het zich uit de evenwichtspositie bevindt? Geef deze weer in een schets voor de wielen en plateau afzonderlijk.
- b) [10p] Laat zien dat de bewegingsvergelijking van het karretje gegeven wordt door

$$M \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{1}{2}kx = 0$$

[Hint: bedenk dat er een krachtmoment werkt op de wielen.]

We geven het karretje een uitwijking $x = A$, en laten het vervolgens op tijdstip $t = 0$ los.

- c) [5p] Hoe groot is de totale mechanische energie van het karretje?
- d) [5p] Hoe groot is de snelheid van het karretje op het moment van passeren van $x = 0$?

Op het moment dat het karretje een van de maximale uitwijkingen ($x = \pm A$) bereikt, valt verticaal op het plateau een object en blijft daaraan kleven.

- e) [5p] Hoe verandert de maximale uitwijking van het karretje: wordt deze groter, kleiner of blijft deze gelijk? Geef dit ook aan voor de snelheid op $x = 0$.
Motiveer kort uw antwoord.
- f) [5p] Beantwoord dezelfde vragen uit e) voor het geval dat het object op het plateau valt op het moment van passeren van $x = 0$.