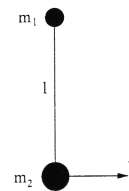


Mechanica, eindtentamen (NS-105B) 3 februari 2006

Opgave 1: Massamiddelpunt

(20 punten)

Gegeven zijn twee massa's m_1 en m_2 die verbonden zijn door een gestrekt koord met lengte l . Het geheel ligt op een verder wrijvingsloos oppervlak. We geven de massa m_2 een snelheid v in de richting loodrecht op het koord.

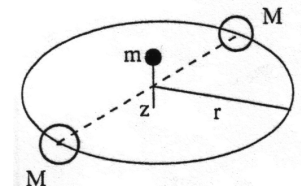


- a) Beschrijf de beweging van dit systeem.
- b) Bereken de spankracht in het koord tijdens deze beweging. (Het kan verhelderend werken door eerst de situatie te bekijken waarin de massa's even groot zijn.)

Opgave 2: Oscillerende planeet

(25 punten)

Twee sterren met massa M voeren een cirkelbeweging uit met hun massamiddelpunt als centrum. De straal van de gemeenschappelijke baan is r , de afstand tussen de sterren is $2r$. Een planeet met massa m ($m \ll M$), beweegt langs de as door het massamiddelpunt loodrecht op het baanvlak.



- a) Bereken de potentiële energie van de planeet als functie van de verplaatsing z .
- b) Geef benaderde uitdrukkingen voor de potentiële energie en de kracht op de planeet als functie van z in de situaties $z \gg r$ en $z \ll r$. In het laatste geval is het maken van een Taylor-ontwikkeling, $(1 + \epsilon)^n \approx 1 + n\epsilon$, noodzakelijk.
- c) Toon aan dat wanneer de planeet in de buurt blijft van het middelpunt ($z \ll r$) de beweging harmonisch is. Bereken de periode T .

Opgave 3: Satelliet om de aarde

(25 punten)

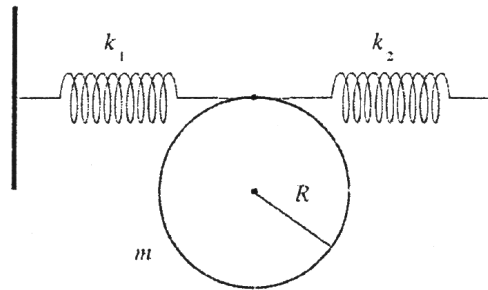
Een satelliet met massa m beweegt in een cirkelbaan met straal R om de aarde (massa M). De satelliet wordt getroffen door een meteoriet met massa m die net voor de botsing met snelheid v_0 beweegt in de richting van het centrum van de aarde. De snelheid v_0 is gelijk aan de baansnelheid van de satelliet vóór de botsing. De botsing is volledig inelastisch, satelliet en meteoriet gaan als één geheel met massa $2m$ verder.

- a) Bereken de mechanische energie en het impulsmoment t.o.v. het centrum van de aarde van de satelliet, (massa $2m$), na de botsing. Druk het antwoord uit in de grootheden G , de gravitatieconstante, M , m en R .
- b) Bereken de kortste en grootste afstand (uitgedrukt in R) tot de aarde die de satelliet in de nieuwe baan bereikt. (Antwoord ter controle: de afstand van het brandpunt tot het middelpunt van de ellips is $\frac{1}{6}\sqrt{10}R$.)
- c) Maak een schets van de nieuwe baan van de satelliet. Let hierbij vooral op de positie van de aarde.

Opgave 4: Oscillerende schijf

(30 punten)

Een massieve schijf met straal R en massa m kan alleen draaien om zijn middelpunt. Aan de rand is de schijf verbonden met twee veren met veerconstanten k_1 en k_2 (zie bovenaanzicht in figuur). De veren zijn beide bevestigd aan een muur. Tijdens de beweging blijft de draaihoek θ vanuit de evenwichtsstand van de schijf zo klein dat de veren in goede benadering horizontaal blijven.



- Stel voor de draaiing van de schijf de bewegingsvergelijking op. ($\tan \theta \approx \theta$)
- Bepaal de trillingsfrequentie ω .
- Op tijdstip $t = 0$ gaat de schijf met een hoeksnelheid ω_0 rechtersom door de evenwichtsstand. Geef de oplossing van de bewegingsvergelijking. Als je onderdeel b niet hebt kunnen uitrekenen, gebruik dan het symbool ω .
- Wat is de totale mechanische energie, uitgedrukt in de gegeven grootheden?

Formuleblad Klassieke mechanica

Dynamica van een deeltje

- Newton: $\vec{\mathbf{F}} : \frac{d\vec{\mathbf{p}}}{dt}, \int_{t_1}^{t_2} \vec{\mathbf{F}} dt = \vec{\mathbf{p}}_2 - \vec{\mathbf{p}}_1$
- eenparig versnelde translatie: $\vec{\mathbf{v}} = \vec{\mathbf{v}}_0 + \vec{\mathbf{a}}t, \vec{\mathbf{r}} = \vec{\mathbf{r}}_0 + \vec{\mathbf{v}}_0t + \frac{1}{2}\vec{\mathbf{a}}t^2$
- impulsmoment: $\vec{\mathbf{L}} = \vec{\mathbf{r}} \times \vec{\mathbf{p}}$, krachtmoment: $\vec{\tau} = \vec{\mathbf{r}} \times \vec{\mathbf{F}}, \vec{\tau} = \frac{d\vec{\mathbf{L}}}{dt}$.

Arbeid en Energie

- $\int_a^b \vec{\mathbf{F}} \cdot d\vec{\mathbf{r}} = \frac{1}{2}mv_b^2 - \frac{1}{2}mv_a^2 = -(U(b) - U(a))$ voor een conservatieve kracht.
- Voorwaarde voor conservatieve kracht: $\oint \vec{\mathbf{F}} \cdot d\vec{\mathbf{r}} = 0$ of $\vec{\mathbf{F}} = -\vec{\nabla}U = -\text{grad } U$.
- Behoud van mechanische energie: $K + U = \text{Constant}$.
- Vermogen: $P = \frac{dW}{dt} = \vec{\mathbf{F}} \cdot \vec{\mathbf{v}}$.
- Evenwicht: $\sum_i \vec{\mathbf{F}}_i = \mathbf{0}$.

Mechanica van een systeem van deeltjes

- Massamiddelpunt $\vec{\mathbf{r}}_{cm} = \frac{1}{M} \sum_i m_i \vec{\mathbf{r}}_i$.
- Impuls: $\vec{\mathbf{p}} = m\vec{\mathbf{v}}_{cm}; \frac{d\vec{\mathbf{p}}}{dt} = m\vec{\mathbf{a}}_{cm} = \vec{\mathbf{F}}_{ext}$.
- Impulsmoment: $\vec{\mathbf{L}} = \sum_i \vec{\mathbf{r}}'_i \times m_i \vec{\mathbf{v}}'_i + \vec{\mathbf{r}}_{cm} \times M\vec{\mathbf{v}}_{cm}; \frac{d\vec{\mathbf{L}}}{dt} = \vec{\tau}$.
- Kinetische energie: $K = \sum_i \frac{1}{2}m_i v_i'^2 + \frac{1}{2}Mv_{cm}^2$;
- Botsingen; Impulsbehoud: $\vec{\mathbf{p}}_1 + \vec{\mathbf{p}}_2 = \vec{\mathbf{p}}'_1 + \vec{\mathbf{p}}'_2$;
Energiebehoud: $\frac{1}{2}m_1 v_1^2 + \frac{1}{2}m_2 v_2^2 = \frac{1}{2}m_1 v_1'^2 + \frac{1}{2}m_2 v_2'^2$.

Rotatie van starre lichamen om een vaste as

- Massamiddelpunt $\vec{\mathbf{r}}_{cm} = \frac{1}{M} \int \rho \vec{\mathbf{r}} dV$
- Traagheidsmoment: $\vec{\mathbf{L}} = I\vec{\omega}; I = \sum_i m_i r_i^2 = \int \rho r^2 dV; I_{cm} = \frac{1}{2}mR^2$ (massieve cilinder), $\frac{2}{5}mR^2$ (massieve bol), $\frac{1}{12}mL$ (dunne lat).
Regel van Steiner (parallele assen-theorema): $I_p = I_{cm} + Md^2$ (p is draaias).
- Bewegingsvergelijking: $\vec{\tau}_{cm} = \frac{d\vec{\mathbf{L}}_{cm}}{dt} = \frac{d}{dt}(I_{cm}\vec{\omega}) = I_{cm}\vec{\alpha}$.
Kinetische energie: $K = \frac{1}{2}mv_{cm}^2 + \frac{1}{2}I_{cm}\omega^2$. Arbeid: $W = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \vec{\tau}_{cm} \cdot d\vec{\theta} = \frac{1}{2}I(\omega_2^2 - \omega_1^2)$.

Hemelmechanica

- Gravitatiewet: $\mathbf{F}_g = \frac{Gm_1m_2}{r^2}$
- Potentiële energie: $U = -\frac{Gm_1m_2}{r}$
- Kepler 1: Banen in centraal $-\frac{k}{r^2}$ krachtveld zijn kegelsneden afhankelijk van de totale mechanische energie E . Ellips: $E < 0$, Parabool: $E = 0$, Hyperbool: $E > 0$.
- Kepler 2: $mr^2\dot{\theta} = L = \text{constant}$ (perkenwet).
- Kepler 3: $\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{GM}$.

Trillingen

- Bewegingsvergelijking: $\frac{d^2x}{dt^2} = \ddot{x} = -\omega^2x$

Sinus- en cosinusfuncties

- $\sin 2a = 2 \sin a \cos a$; $\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a = 2 \cos^2 a - 1 = 1 - 2 \sin^2 a$
- $\sin(a \pm b) = \sin a \cos b \pm \cos a \sin b$
- $\cos(a \pm b) = \cos a \cos b \mp \sin a \sin b$
- $\sin a + \sin b = 2 \sin \frac{1}{2}(a + b) \cos \frac{1}{2}(a - b)$
- $\cos a + \cos b = 2 \cos \frac{1}{2}(a + b) \cos \frac{1}{2}(a - b)$

Taylor-ontwikkeling

- Voor kleine ε geldt: $(1 + \varepsilon)^n = 1 + n\varepsilon + \dots$

Engels – Nederlands

- Momentum — Impuls
- Angular momentum — Impulsmoment
- Impulse — Stoot
- Moment of inertia — Traagheidsmoment
- Torque — (Kracht)moment