

Tentamen Infinitesimaalrekening A

21 december 2015, 13.30 – 16.30 uur

- Maak de opgaven op het uitgereikte papier en vul op elk blad dat je inlevert je naam en studentnummer in. Je mag de opgaven in willekeurige volgorde maken.
- Zet op het eerste blad eventueel een emailadres waar je de uitslag wenst te ontvangen.
- Geef niet alleen het antwoord, maar laat ook zien hoe je aan je antwoord komt.
- Je hoeft alleen de eerste zeven opgaven te maken, deze tellen elk voor tien punten, behalve opgave 4, die voor 15 punten telt. Het tentamencijfer is het totaal aantal punten gedeeld door 7,5. Met de achtste opgave (bonusopgave) kun je maximaal tien punten extra verdienen, met dien verstande dat het tentamencijfer nooit hoger dan 10 kan zijn.
- Op dit tentamen mogen geen rekenapparaten of andere electronica gebruikt worden, en ook geen boeken, dictaten of eigen aantekeningen.
- *Veel succes!*

Opgave 1. Bepaal alle complexe getallen z die voldoen aan $(z - 2)^2 + 7i = 3iz + 3$. Geef de getallen in de vorm $a + bi$ waarbij a en b rationale getallen zijn.

Opgave 2. Bepaal een tweemaal differentieerbare reële functie $y(x)$ zodat $y'' + 2y' + 2y = 4 \sin 2x + 2 \cos 2x$ voor alle x en tevens $y(0) = y'(0) = 0$.

Opgave 3. Voor $x > 0, x \neq 1$ stellen we $f(x) = \frac{\sqrt{x} + \cos \pi x}{\sqrt{x} - \sqrt[3]{x}}$.

(a) Bepaal $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$.

(b) Bestaat $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$? Zo ja, toon aan dat deze limiet bestaat en bepaal de waarde. Zo nee, leg uit waarom de limiet niet bestaat.

Z.O.Z!!!!

Opgave 4 (15 punten)

(a) (8 punten) Primitiveer de functie $f(x) = \frac{1}{1 + \sqrt{x}}$. Controleer je antwoord door differentiëren.

(b) (7 punten) Bepaal $\int_0^1 x^2 \sin \pi x \, dx$.

Opgave 5. (a) Bepaal de tweede-orde Taylorveelterm van $f(x) = \sqrt[6]{x}$ in het steunpunt 1, en bepaal hiermee een benadering van $\sqrt[6]{1\frac{1}{5}}$. N.B. Zesdemachtswortel!

(b) Toon aan dat de fout in je benadering van $\sqrt[6]{1\frac{1}{5}}$ in absolute waarde kleiner is dan $\frac{1}{2000}$.

Opgave 6. Bepaal $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{n} \sqrt{1 + \frac{2k}{3n}}$.

Opgave 7. Bepaal alle differentieerbare functies $y(x)$ die gedefinieerd zijn op het domein $(0, \infty)$, zodanig dat de functie y en de afgeleide y' voldoen aan

$$y^3 = -y'$$

Let op: de functies moeten op het hele domein $(0, \infty)$ gedefinieerd zijn.

Controleer ook dat de functies die je gevonden hebben aan de vergelijking voldoen.

Bonusopgave. Opgave 8.

Bereken $\int_{\sqrt{3}}^{\infty} \frac{1}{x^4 - 1} \, dx$