- Je hebt twee uur de tijd voor het oplossen van de vraagstukken.
- Elk vraagstuk is maximaal 10 punten waard.

μKW
13 juni 2014

Vraagstuk 1. Bekijk een rijtje gehele getallen (waarnemingen) $x_1, \ldots, x_n$. De (steekproef)variantie van $x_1, \ldots, x_n$ is gedefinieerd als $\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2$ met $\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$ het gemiddelde van $x_1, \ldots, x_n$. Bewijs dat als $n = 3$ de variantie van $x_1, \ldots, x_n$ geheel is dan en slechts dan als het gemiddelde van $x_1, \ldots, x_n$ geheel is. Bewijs bovendien dat er geen enkele $n > 3$ bestaat waarvoor dit waar is.

Oplossing 1. Voor $n = 3$ merken we op dat dat de variantie van x_1, x_2, x_3 gelijk is aan

$$\begin{aligned}
\mathrm{Var}(x_1, x_2, x_3) &= \frac{(x_1 - (\frac{x_1+x_2+x_3}{3}))^2 + (x_2 - (\frac{x_1+x_2+x_3}{3}))^2 + (x_3 - (\frac{x_1+x_2+x_3}{3}))^2}{2} \\
&= \frac{(2x_1 - x_2 - x_3)^2 + (2x_2 - x_1 - x_3)^2 + (2x_3 - x_1 - x_2)^2}{18} \\
&= \frac{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_1x_2 - x_2x_3 - x_3x_1}{3}.
\end{aligned}$$

Dit is geheel dan en slechts dan als

$$\mathrm{Var}(x_1, x_2, x_3) + x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 = \frac{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_2x_3 + 2x_3x_1}{3} = \frac{(x_1 + x_2 + x_3)^2}{3}$$

geheel is, oftewel dan en slechts dan als $(x_1 + x_2 + x_3)^2$ deelbaar is door 3. Dat is precies zo wanneer $x_1 + x_2 + x_3$ deelbaar is door 3 (want 3 is priem), oftewel wanneer het gemiddelde van x_1, x_2, x_3 geheel is.
Een tegenvoorbeeld wordt voor $n > 3$ gegeven door $x_1 = 0$, $x_n = 2$ en $x_i = 1$ voor andere i. Dan is het gemiddelde van de x_i gelijk aan 1 (en dus geheel) terwijl de variantie gelijk is aan $\frac{2}{n-1}$ (en dus niet geheel).

Oplossing 2. Zoals in de eerste oplossing merken we op dat de variantie van x_1, x_2, x_3 gelijk is aan $\frac{x_1^2+x_2^2+x_3^2-x_1x_2-x_2x_3-x_3x_1}{3}$ en dus geheel is dan en slechts dan als $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_1x_2 - x_2x_3 - x_3x_1$ deelbaar is door 3. Het gemiddelde is geheel dan en slechts dan als $x_1 + x_2 + x_3$ deelbaar is door 3. Het is dus alleen relevant wat de rest is van x_1, x_2 en x_3 is bij deling door 3: hiervoor zijn $3^3 = 27$ mogelijkheden. Afgaan van alle mogelijkheden laat zien dat zowel $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_1x_2 - x_2x_3 - x_3x_1$ als $x_1 + x_2 + x_3$ deelbaar is door 3 precies als x_1, x_2 en x_3 allemaal dezelfde of allemaal verschillende rest geven bij deling door 3; in het bijzonder zijn deze uitspraken dus equivalent. Dus voor $n = 3$ is de variantie geheel dan en slechts dan als het gemiddelde geheel is.
Zoals in de eerste oplossing hebben we voor $n > 3$ een tegenvoorbeeld.

Vraagstuk 2. We bekijken reële getallen x, y, z en schrijven

$$V = \operatorname{span}\left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} z \\ x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y \\ z \\ x \end{pmatrix} \right\} \subset \mathbb{R}^3.$$

(a) Bewijs dat $\dim(V) < 3$ dan en slechts dan als $(x+y+z)((x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2) = 0$.

(b) Bepaal alle mogelijke waarden van $\dim(V)$ en bepaal alle drietallen (x, y, z) waarvoor deze dimensies worden aangenomen.

Oplossing.

(a) Er geldt dat $\dim(V) < 3$ dan en slechts dan als drie vectoren afhankelijk zijn, oftewel dan en slechts dan als

$$0 = \begin{vmatrix} x & z & y \\ y & x & z \\ z & y & x \end{vmatrix} = x\begin{vmatrix} x & z \\ y & x \end{vmatrix} - z\begin{vmatrix} y & z \\ z & x \end{vmatrix} + y\begin{vmatrix} y & x \\ z & y \end{vmatrix} = x(x^2-zy)-z(yx-z^2)+y(y^2-xz) = x^3+y^3+z^3-3xyz.$$

Omdat $x^3+y^3+z^3-3xyz = \frac{1}{2}(x+y+z)((x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2)$ volgt nu dat $\dim(V) < 3$ dan en slechts dan als $(x+y+z)((x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2) = 0$.

(b) Merk op dat dat $(x+y+z)((x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2) = 0$ dan en slechts dan als $x+y+z = 0$ of $x = y = z$. Als niet aan één van beide eisen wordt voldaan geldt dus dat $\dim(V) = 3$ (en dit kan ook gebeuren, bijvoorbeeld als $(x, y, z) = (0, 0, 1)$). Stel nu dat $x = y = z$. Als $x = y = z = 0$ geldt $V = \operatorname{span}\{(0,0,0)^T, (0,0,0)^T, (0,0,0)^T\} = \{(0,0,0)^T\}$ met dimensie 0. Als $x = y = z \neq 0$ geldt $V = \operatorname{span}\{(x,x,x)^T, (x,x,x)^T, (x,x,x)^T\} = \operatorname{span}\{(x,x,x)^T\}$ en dat heeft dimensie 1 omdat $x \neq 0$.

Stel nu dat $x+y+z = 0$. Als $x = y = z = 0$ vinden we wederom dimensie 0. Stel nu dat dit niet het geval is en neem zonder verlies van algemeenheid aan dat $x \neq 0$. We weten nu dat $1 \leq \dim(V) \leq 2$. Stel dat $\dim(V) = 1$ dan geldt dat $(y, z, x)^T \in \operatorname{span}\{(x, y, z)^T\}$, dus er bestaat een $\lambda \in \mathbb{R}$ met $y = \lambda x$, $z = \lambda y$ en $x = \lambda z$. Nu geldt dus dat

$$x = \lambda z = \lambda^2 y = \lambda^3 x, \qquad \text{dus wegens } x \neq 0 \qquad \lambda^3 = 1.$$

Nu geldt dus $\lambda = 1$ en $x = y = z$. Maar dan zou moeten gelden dat $0 = x+y+z = 3x$ een tegenspraak met $x \neq 0$. Dus er geldt $\dim(V) = 2$ in dit geval. We concluderen dat

$$\dim(V) = \begin{cases} 0 & \text{als } x = y = z = 0; \\ 1 & \text{als } x = y = z \neq 0; \\ 2 & \text{als } x+y+z = 0, (x,y,z) \neq (0,0,0); \\ 3 & \text{in alle andere gevallen.} \end{cases}$$

Dit voltooit het bewijs.

Vraagstuk 3. We hebben 2014 fiches, elk met een rode kant en een blauwe kant. We maken als volgt een rij met deze 2014 fiches: het eerste fiche leggen we met de rode kant boven neer en leggen we op de eerste positie in de rij. Als we op een gegeven moment een rij van n fiches hebben, waarvan k met de rode kant boven, dan werpen we met kans $\frac{k}{n}$ het volgende fiche en met kans $1 - \frac{k}{n}$ leggen we het fiche neer met de rode kant boven. Als we een fiche werpen is de kans dat de rode kant boven komt te liggen gelijk aan $\frac{1}{2}$ en evenzo voor de blauwe kant. Het nieuwe fiche leggen we op positie $n + 1$ in de rij. Dit doen we net zo lang totdat alle 2014 fiches op tafel liggen. Als gegeven is dat er exact één blauw fiche op tafel ligt, bewijs dan dat de verwachtingswaarde van de positie van dit fiche gelijk is aan

$$\frac{2013}{\sum_{n=2}^{2014} \frac{1}{n}}.$$

N.B. deze verwachtingswaarde is bij benadering gelijk aan 280.15.

Oplossing. Stel dat op een gegeven moment n fiches in de rij liggen, waarvan er k met de rode kant boven liggen. Het volgende fiche heeft dan kans $\frac{1}{2} \cdot \frac{k}{n} + \left(1 - \frac{k}{n}\right) = 1 - \frac{k}{2n}$ om met de rode kant boven te komen liggen. Als $k = n$ is deze kans gelijk aan $\frac{1}{2}$ en is de kans op een blauw fiche dus ook gelijk aan $\frac{1}{2}$. Als $k = n - 1$ is de kans op een rood fiche gelijk aan $1 - \frac{n-1}{2n} = \frac{1}{2} \cdot \frac{n+1}{n}$. Voor $2 \leq m \leq 2014$ definiëren we p_m als de kans op en rij van 2014 fiches waarvan enkel het fiche op positie m blauw is. Omdat de eerste $m - 1$ fiches nu allen rood zijn volgt dat de kans dat de fiches $2, 3, \ldots, m$ allen de juiste kleur aannemen gelijk is aan $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdots \frac{1}{2} = \left(\frac{1}{2}\right)^{m-1}$. Vanaf dan ligt er exact één blauw fiche op tafel, dus als $m < 2014$ is de kans dat alle overige fiches rood worden gelijk aan $\left(\frac{1}{2} \cdot \frac{m+1}{m}\right) \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{m+2}{m+1}\right) \cdots \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{2014}{2013}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^{2014-m} \frac{2014}{m}$. Voor $m = 2014$ klopt dit ook, want dan komt er de waarde 1 uit. We concluderen dat $p_m = \left(\frac{1}{2}\right)^{m-1} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{2014-m} \cdot \frac{2014}{m} = \frac{1}{2^{2013}} \cdot \frac{2014}{m}$. Nu geldt dat

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[\text{positie} \mid 1 \text{ blauwe}] &= \sum_{m=2}^{2014} m \cdot \mathbb{P}[\text{blauwe op positie } m \mid 1 \text{ blauwe}] \\
&= \sum_{m=2}^{2014} m \cdot \frac{\mathbb{P}[\{\text{blauwe op positie } m\} \cap \{1 \text{ blauwe}\}]}{\mathbb{P}[1 \text{ blauwe}]} \\
&= \sum_{m=2}^{2014} m \cdot \frac{p_m}{\sum_{n=2}^{2014} p_n} = \sum_{m=2}^{2014} m \cdot \frac{2^{2013} p_m / 2014}{\sum_{n=2}^{2014} 2^{2013} p_n / 2014} \\
&= \sum_{m=2}^{2014} m \cdot \frac{1/m}{\sum_{n=2}^{2014} 1/n} = \sum_{m=2}^{2014} \frac{1}{\sum_{n=2}^{2014} 1/n} = \frac{2013}{\sum_{n=2}^{2014} \frac{1}{n}},
\end{aligned}$$

zoals gevraagd.

Vraagstuk 4. Bestaat er een continue functie $f : (0,1) \to \mathbb{R}$ zodat voor elke $r \in \mathbb{R}$ er een rij getallen $(x_n)_{n\geq 1}$ in $(0,1)$ bestaat met $x_n \to 0$ voor $n \to \infty$ en $f(x_n) \to r$ voor $n \to \infty$?

Oplossing. Ja, bekijk $f(x) = \frac{1}{x}\sin\left(\frac{1}{x}\right)$. Omdat $x \mapsto \frac{1}{x}$ continu is voor $x \in (0,1)$ en $y \mapsto \sin(y)$ continu is voor alle $y \in \mathbb{R}$ volgt met de substitutieregel gevolgd door de productregel dat f eveneens continu is. We bekijken nu een $r \in \mathbb{R}$ en onderscheiden drie gevallen:

- $r = 0$: Kies $x_n = \frac{1}{\pi n}$ voor $n \in \mathbb{N}$. Dan geldt $0 < x_n < 1$ voor alle n en bovendien geldt $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$. Verder geldt $f(x_n) = \pi n \sin(\pi n) = 0$ voor elke n, dus in het bijzonder geldt $f(x_n) \to 0$ voor $n \to 0$.
- $r > 0$. Kies $N \in \mathbb{N}$ zodanig dat $2\pi N > r$. Merk op dat voor $k \geq N$ geldt dat $f\left(\frac{1}{2\pi k}\right) = 2\pi k \sin(2\pi k) = 0$ en $f\left(\frac{1}{2\pi k+\pi/2}\right) = (2\pi k+\pi/2)\sin(2\pi k+\pi/2) = 2\pi k+\pi/2 > 2\pi k \geq 2\pi N > r$. Nu bestaat er met de tussenwaardestelling dus een $y_k \in \left[\frac{1}{2\pi k+\pi/2}, \frac{1}{2\pi k}\right]$ zodat $f(y_k) = r$. Het is duidelijk dat $y_k \to 0$ voor $k \to \infty$. De rij $(x_n)_{n\geq 1}$ gedefinieerd door $x_n = y_{N+n-1}$ voldoet nu aan $x_n \to 0$ voor $n \to \infty$ en bovendien geldt $f(x_n) = f(y_{N+n-1}) = r$ voor elke $n \in \mathbb{N}$, dus ook $f(x_n) \to r$ voor $n \to \infty$.
- $r < 0$. Kies wederom $N \in \mathbb{N}$ zodanig dat $-2\pi N < r$. Voor $k \geq N$ geldt wederom dat $f\left(\frac{1}{2\pi k+\pi}\right) = (2\pi k + \pi)\sin(2\pi k + \pi) = 0$ en $f\left(\frac{1}{2\pi k+3\pi/2}\right) = (2\pi k + 3\pi/2)\sin(2\pi k + 3\pi/2) = -(2\pi k + 3\pi/2) < -2\pi k \leq -2\pi N < r$. Analoog aan hierboven construeren we nu een rij $(x_n)_{n\geq 1}$ met $f(x_n) = r$ voor elke $n \in \mathbb{N}$.

We hebben nu alle gevallen gehad en hiermee is aangetoond dat de functie inderdaad voldoet.